

Modelación de una situación que implica el uso de la función exponencial

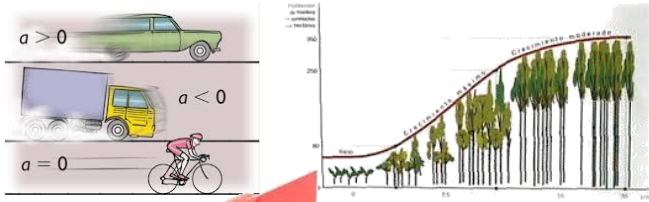
Diana Tec Escalante

Universidad de Quintana Roo

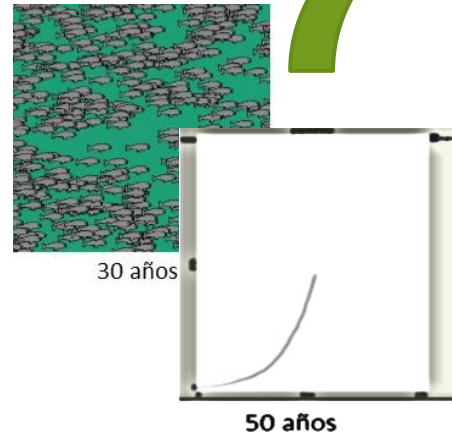
México

djte21@hotmail.com

Introducción



Variación,
tasa de cambio y
función



Subestructura matemática

$$P_t = P(1 + r)^t$$

$$P_t = P(1 - r)^t$$

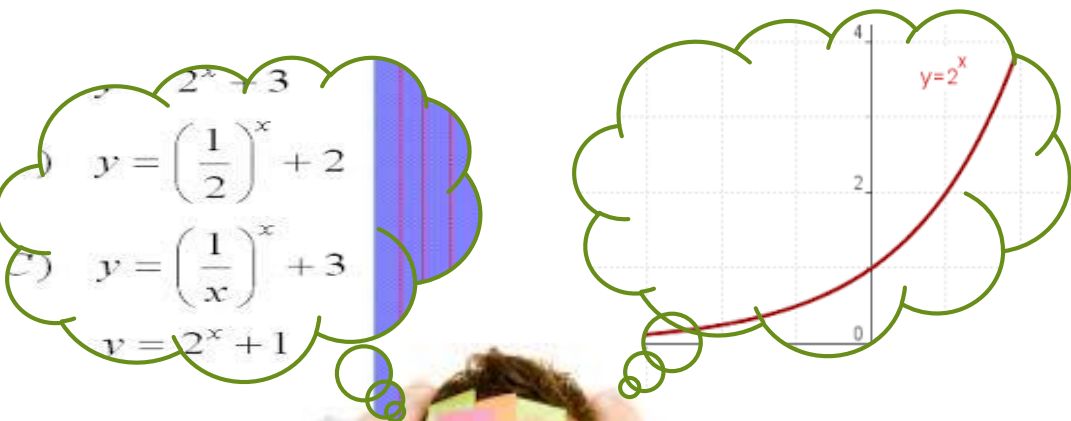
Transferencia

“Cambios de todo tipo influyen en nuestras vidas”
(Stewart 2003, p. 193)

Actualidad



Antecedentes



Diseño y análisis del tipo de tareas a proponer en el aula

Modelos y modelación (Lesh y Doerr, 2003);
Resolución de problemas (NCTM, 2003)



Ambiente de aprendizaje

(NCTM, 2003)



Promover una ampliación o modificación de los tipos y formas de razonamiento matemático que desarrollan los estudiantes

(Kaput y Roschelle, 1998; Lesh, 2010).

Actividad Provocadora de Modelos (APM)

EL ECONOMISTA

Lunes 8 de Septiembre de 2014 | 00:04

En México no se ahorra suficiente para la jubilación

Según HSBC, 43% de las personas jubiladas en México no ha logrado alcanzar las metas y aspiraciones que se fijó para este momento.

YURIDIA TORRES / EL ECONOMISTA

SEP 19, 2013 | 17:23

Foto: Shutterstock

Una casa en la playa, otra en las montañas, viajes continuos, tiempo con los hijos y nietos; así sueñan que será su vejez muchas personas y anhelan el día en que lleguen el monto de su retiro laboral; recibir esa pensión mensual, que seguramente alcanzará para pagar todos los caprichos que deseen.

La realidad es que no será así. No siempre es así. De acuerdo con el informe de HSBC "El futuro del retiro, la vida después del trabajo", 43% de las personas retiradas en México no ha logrado alcanzar las metas y aspiraciones que se fijó para el momento de su retiro laboral. La razón es que los jubilados tienen menos dinero del que esperaban recibir y entonces sus sueños, viajes, regalos, casas, siguen siendo eso, sueños. El hecho es que los mexicanos ahorran poco para su retiro, afirmó Eduardo Varón, director de Distribución de Banca Premier de HSBC México.

"Es importante utilizar todos los mecanismos que se tienen disponibles para ahorrar; el estudio dice que las personas apuestan mucho a las pensiones de gobierno, a las afores, a los esquemas privados de retiro, pero una de las recomendaciones es que las personas diversifiquen las fuentes de ahorro para su pensión", dijo.



PROPUESTAS

Entre las medidas propuestas para fomentar una seguridad social universal en el país, están el impulso al ahorro voluntario de las personas, con una cuenta en alguna afore.

Recientemente, el Presidente de México propuso que por cada aportación voluntaria de las personas registradas en el Sistema de Ahorro para el Retiro y afiliadas al IMSS, el gobierno federal pondrá una fracción del monto que la persona ahorre.

El retiro de sus sueños

Recomendaciones que se deben tomar en cuenta antes de pensionarse:

NO SE APRESURE. Existe la percepción entre las personas retiradas de haberse apresurado en dejar un empleo pagado. Muchas personas retiradas que ven el trabajo como un medio importante para mantener el cuerpo y la mente activos.

DIVERSIFIQUE. En la actualidad, los jubilados tienen tres diferentes fuentes de ingreso en el retiro, al decidir sabiamente no depositar en un solo lugar la generación de sus ingresos. Separar sus fuentes de ingreso en el retiro y los riesgos asociados significa que no se tienen todos los huevos en una misma canasta.

CONSIDERE A SU FAMILIA. Mientras muchas personas aspiran a viajar mucho durante su retiro, cerca de la mitad de los trabajadores actuales esperan tener responsabilidades financieras con otros, incluso estando retirados. Esto incluye responsabilidades financieras continuas con sus hijos adultos, así como respaldar a padres mayores en un estado delicado.

Preguntas de comprensión

¿Qué aspiraciones tienes para el momento de tu jubilación?

¿Por qué las personas jubiladas en México no logran alcanzar las metas y aspiraciones que se fijaron para este momento?

¿Qué recomendaciones son importantes seguir antes de jubilarse?

Problema 1. Ayuda a Mateo

Mateo un chico Chetumaleño de 19 años, acaba de obtener su primera oportunidad de trabajo como cajero.

En la firma del contrato le dieron una pequeña orientación sobre el pago de su sueldo, el cual es de \$1400 mensual. Le explicaron brevemente sobre las deducciones que se le deben de realizar conforme a la ley. Entre ellas la cuota obrera para cesantía y vejez con la cual le descuentan el 1.125% de su salario para aportarla a su fondo de ahorro para el retiro. La encargada de recursos humanos le comenta que este fondo genera un interés el cual se acumula al fondo al final de cada mes, esto dependiendo de la AFORE que elija.

Siendo su primer trabajo, Mateo sale de la firma del contrato con la duda de cómo elegir ello. Solicita información vía correo electrónico a la AFORE XXI Banorte donde tú eres parte del equipo de atención a clientes, por lo que deberás redactar una carta donde le ayudes a aclarar sus dudas a Mateo, explicándole detalladamente tus procedimientos:

1. ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del primer mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
2. ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del segundo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
3. ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del cuarto mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
4. ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del doceavo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
5. ¿Cuánto dinero tendría en el fondo cuando llegue a la edad de su jubilación si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
6. ¿Por qué debería elegir tu AFORE y no otra?

Cuentas con la siguiente información:

La aportación total a una cuenta de Afore está compuesta por la parte del patrón 5.15%, la del empleado 1.125% y del Gobierno Federal 0.225%, calculado del Salario Base del empleado.

El rendimiento que genera tu fondo de ahorro, se acumula al capital final de cada intervalo de tiempo previsto.

Requisitos para tener derecho a pensión por cesantía (vejez) para la Ley de 1997, Artículo 162 de la Ley del Seguro Social

- Tener 65 Años Cumplidos,
- Tener como Mínimo 1,250 Semanas de Cotización.
- Cumplir con los requisitos anteriores a la Ley del '73, (son los mismo)

Información de AFORES

AFORE	RENDIMIENTO	COMISION %
Sura	11.45	1.21
Profituro	11.12	1.27
Banamex	10.85	1.16
MetLife	10.81	1.39
XXI Banorte	10.72	1.1
Principal	10.55	1.36
Azteca	8.9	1.45
Coppel	7.96	1.49
Afirme Bajío	7.61	1.4
Inbursa	5.79	1.17

FUENTE: CONSAR.

► **Porcentaje total de la portación:**
 $5.15\% + 1.125\% + 0.225\% = 6.505$
 $6.505\% = 0.06505$

► **Monto que entraría al fondo de ahorro:**

$$1400(.06505)=91$$

► **Rendimiento neto (Tabla 1):**

$$10.72\% - 1.1\% = 9.62\%$$
$$9.62\% = 0.0962$$

Forma numérica recursiva

- ▶ Aportación inicial

91

- ▶ Monto al final del primer periodo:

$$91+91+0.0962 (91)= 182+8.7542= 190.75$$

- ▶ Monto al final del segundo periodo:

$$91+190.75+0.0962 (190.75)=300.10$$

- ▶ Monto al final del tercer periodo

$$91+300.10+0.0962 (300.10)=419.96$$

- ▶ ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del doceavo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?

⋮

- ▶ Monto del fondo al final del doceavo periodo

$$91+1902.08+ 0.0962 (1902.08)= 2176.06$$

¿Qué datos empleas para calcular cada uno de los montos?

¿Podemos sistematizar las operaciones realizadas en una expresión que nos permita calcular el monto en cualquier periodo?

Representación tabular de los estudiantes

Periodos transcurridos	Rendimiento	Monto del sueldo a fondo	Monto del periodo anterior	Intereses ganados de monto anterior	Monto final del periodo
0	0.0962	91	0.00	0.00	91.00
1	0.0962	91	91.00	8.75	190.75
2	0.0962	91	190.75	18.35	300.10
3	0.0962	91	300.10	28.87	419.97
4	0.0962	91	419.97	40.40	551.38
5	0.0962	91	551.38	53.04	695.42
6	0.0962	91	695.42	66.90	853.32
7	0.0962	91	853.32	82.09	1026.41
8	0.0962	91	1026.41	98.74	1216.15
9	0.0962	91	1216.15	116.99	1424.14
10	0.0962	91	1424.14	137.00	1652.14
11	0.0962	91	1652.14	158.94	1902.08
12	0.0962	91	1902.08	182.98	2176.06
13	0.0962	91	2176.06	209.34	2476.40

Sistematización de la información para identificar patrones

- ▶ Aportación inicial: $M_0 = 91$.

- ▶ Monto al cabo de un mes:

$$M_1 = 91 + 91 + 0.0962(91) = 190.75 \quad \rightarrow \quad M_1 = 91 + M_0 + 0.0962 M_0 = 190.75$$

- ▶ Monto al cabo de dos meses:

$$M_2 = 91 + M_1 + 0.0962 M_1 = 300.1 \quad \rightarrow \quad M_2 = 91 + 1.0962 M_1 = 300.1$$

- ▶ Monto al cabo de tres meses:

$$M_3 = 91 + M_2 + 0.0962 M_2 = 419.97 \quad \rightarrow \quad M_3 = 91 + 1.0962 M_2 = 419.97$$

- ▶ Monto al cabo de cuatro meses:

$$M_4 = 91 + 1.0962 M_3 = 551.38$$

- ▶ ¿Cuánto dinero tendrá Mateo en su fondo al final del doceavo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?

⋮

$$M_{12} = 91 + 1.0962 M_{11} = 1902.08$$

¿Qué representa cada sumando? ¿Cuánto dinero tendría en el fondo cuando llegue a la edad de su jubilación si su sueldo continúa siendo del mismo monto? ¿Qué método efectivo puedo emplear?

Generalización: Simbolismo algebraico

- ▶ Monto al cabo de un mes:

$$M_1 = 91 + M_0 + 0.0962 (M_0) = 190.75$$



Reescribiendo

$$M_1 = 91 + 91 + 0.0962 (91) = 190.75$$

$$M_1 = 91 + 91(1.0962) = 91[1 + 1.0962] = 190.75$$

- ▶ Monto al cabo de dos meses:

$$M_2 = 91 + M_1 + 0.0962 M_1 = 300.1$$



Reescribiendo

$$M_2 = 91 + 1.0962[91 + 91(1.0962)] = 300.1$$

$$M_2 = 91 + 91 \cdot 1.0962 + 91 \cdot 1.0962^2 = 300.1$$

Simplificando

$$M_2 = 91 + 1.0962 M_1 = 300.1$$

$$M_2 = 91(1 + 1.0962 + 1.0962^2) = 300.1$$

- ▶ Monto al cabo de cuatro meses:

$$M_4 = 91(1 + 1.0962 + 1.0962^2 + 1.0962^3 + 1.0962^4)$$

⋮

- ▶ Monto al cabo de doce meses:

$$M_{12} = 91(1 + 1.0962 + 1.0962^2 + 1.0962^3 + 1.0962^4 + \dots + 1.0962^{12})$$

$$M_{552} = 91(1 + 1.0962 + 1.0962^2 + \dots + 1.0962^{100} + \dots + 1.0962^{300} + \dots + 1.0962^{552})$$

¿Cómo puedo calcular el monto del fondo para cualquier periodo de tiempo? ¿Hay forma de saberlo sin tener que hacer tantas operaciones?

Generalización: Simbolismo algebraico

Deducción de la forma general:

$$\blacktriangleright M_n = 91 + 91(1.0962) + 91(1.0962^2) + 91(1.0962^3) + \dots + 91(1.0962^n)$$

Entonces

$$\blacktriangleright 1.0962M_n = 91(1.0962) + 91(1.0962^2) + 91(1.0962^3) + 91(1.0962^4) + \dots + 91(1.0962^{n+1})$$

Luego

$$\blacktriangleright M_n - 1.0962M_n = 91 - 91(1.0962^{n+1})$$

$$\blacktriangleright M_n(1 - 1.0962) = 91(1 - 1.0962^{n+1})$$

\blacktriangleright Así despejando M_n , finalmente

$$M_n = 91 \frac{(1 - 1.0962^{n+1})}{(1 - 1.0962)}$$

- \blacktriangleright ¿Qué relación encuentras entre el periodo del monto que se está calculando y el exponente de la expresión?
- \blacktriangleright ¿Cuál sería el monto del fondo de Mateo al momento de su retiro?
- \blacktriangleright ¿Sirve la expresión encontrada para calcular el monto del ahorro de Mateo en cualquier periodo de tiempo?

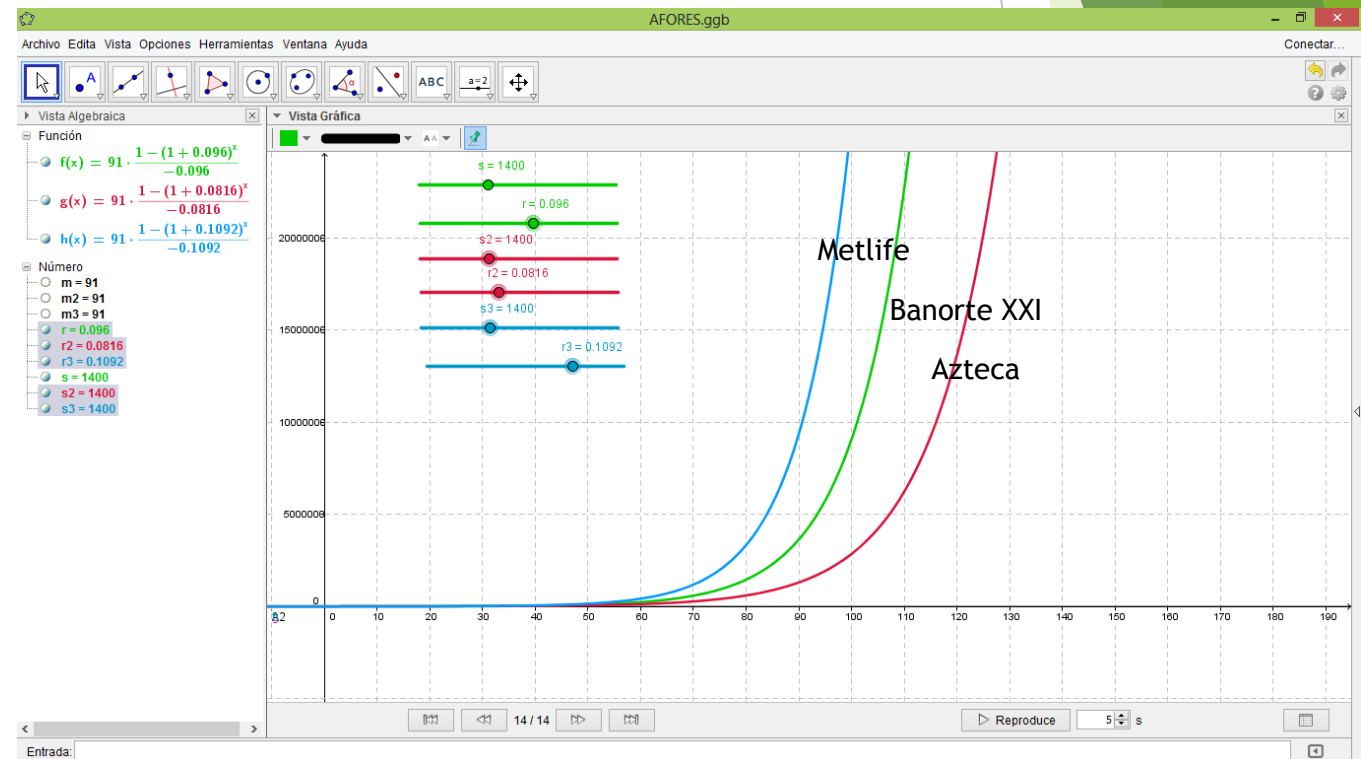
Comparando una familia de problemas

Comparación de modelos y extensión hacia el análisis del monto ahorrado para otras Afores

- ▶ ¿Por qué debería elegir tu AFORE y no otra?
- ▶ ¿Funcionan los modelos construidos para analizar el ahorro utilizando otras Afores?

Generar conjeturas antes de la simulación comparando diferentes afores:

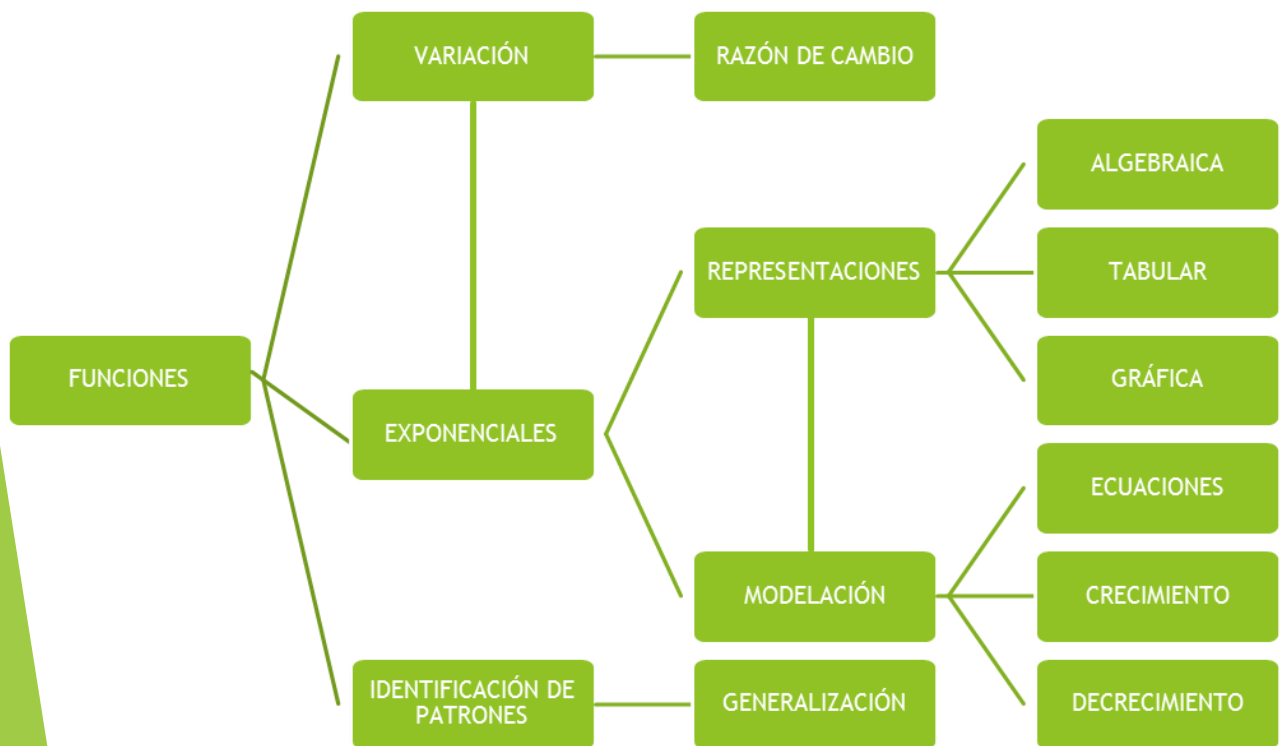
- ▶ ¿Cómo es el incremento del monto del ahorro en el tiempo, si consideramos diferentes tasas de rendimiento?
- ▶ ¿Qué podemos decir acerca del monto inicial?
- ▶ ¿Cómo es el monto después de un determinado tiempo?
- ▶ Que interpretación le damos a la intersección de las curvas con el eje y.



Posible siguiente problema:

Conociendo el monto de ahorro de Mateo al momento de su jubilación
¿Para cuánto tiempo le alcanzará considerando sus gastos mensuales?

Conclusión



- ▶ Kaput, J. & Roschelle, J. (1998). The mathematics of change and variation from a millennial perspective: New Content, new context. En C. Hoyles, C. Morgan, & G. Woodhouse (Eds.), Mathematics for a new millennium (pp. 155-170). London: Springer-Verlag.
- ▶ Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- ▶ Lesh, R. A. (2010). Tools, Researchable Issues & Conjectures for Investigating what it Means to Understand Statistics (or other topics) Meaningfully. Journal of Mathematical Modeling and Application , 1 (2), 16-48.
- ▶ National Council of Teachers of Mathematics (2003). Principios para la Educación Matemática. (M. Fernández, Trad.). España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. (Trabajo original publicado en 2000).
- ▶ Stewart, I. (2003). La enseñanza agradable de las matemáticas. En R. García, On the shoulders of giants: New approaches to numeracy (págs. 183-217). D.F., México: DC: National Academy Press.
- ▶ Torres, Y. (2013). En México no se ahorra lo suficiente para la jubilación. El Economista. Recuperado el 8 de septiembre de 2014, de <http://eleconomista.com.mx/finanzas-personales/2013/09/18/usted-apuesta-retiro-laboral-comodo>