



# Formas de Pensamiento Algebraico y el uso de la Hoja Electrónica de Cálculo

Dra. Verónica Vargas Alejo  
Área de matemáticas, Departamento de Ciencias  
DCI- UQROO

# Introducción

- En la actualidad, hay investigaciones que destacan el potencial de las herramientas tecnológicas (software) para propiciar aprendizajes de matemáticas en los estudiantes.
- Sin embargo, en la mayoría de estos estudios se ignoran los aspectos técnicos de la herramienta (valor pragmático) y su relación con la adquisición de conceptos (valor epistémico). (Artigue, 2002; Haspekian, 2005)
- Es decir, la hoja electrónica puede promover el crecimiento técnico y conceptual del álgebra de los estudiantes mientras los aspectos técnicos no sean ignorados.

- 
- En este sentido, en esta ponencia son descritas las técnicas de los estudiantes en la resolución de un problema, así como el desarrollo de formas de pensamiento algebraico.
  - El problema que se discute fue parte de una serie de problemas implementados en un curso de álgebra de bachillerato con el propósito de desarrollar conceptos algebraicos.
  - Se utiliza la aproximación instrumentalista para analizar los datos.

- 
- ¿Cómo se desempeñan los estudiantes en la resolución de problemas, mediante el uso de la hoja electrónica? ¿Qué técnicas (o procedimientos) utilizan?
  - ¿Cómo se relacionan estas técnicas con formas de pensamiento algebraico?

# Problema

*Juan compró 450 cuadernos y 300 plumones y gastó \$6600. Si cada cuaderno le costó el doble de cada plumón ¿cuánto le costó cada cuaderno y cada plumón? (Vargas & Guzmán, 2007)*

$$\begin{cases} 450x + 300y = 6600 \\ x = 2y \end{cases}$$

# Revisión de literatura

- La aproximación instrumentalista, ha sido discutida por autores como Artigue (2002), Haspekian (2005) y Lagrange (1999).

La hoja electrónica es un artefacto, el cual es usado como herramienta en la resolución de problemas.

Los estudiantes al interactuar con él (artefacto) desarrollan esquemas y técnicas que guían la manera como éste es usado y su pensamiento, dando lugar al proceso de evolución del artefacto a instrumento (Trouche, 2004).


- La construcción de esquemas de utilización en el estudiante es una combinación de los procesos de Instrumentalización e Instrumentación, es decir, de procesos dirigidos hacia el artefacto y hacia el estudiante, respectivamente.
- Las técnicas (o manera de llevar a cabo una tarea) son importantes en la construcción del conocimiento matemático y como parte de éste.

- La *técnica* es una manera de resolver una tarea, es un ensamble complejo de razonamiento y trabajo de rutina. Ésta puede ser evaluada y percibida en términos de su *valor pragmático* y su *valor epistémico*. Por lo tanto, contribuye a la comprensión de los objetos matemáticos involucrados y formas de pensamiento involucradas.
- La técnica, la teoría y la tarea son elementos importantes de la Génesis Instrumental. Están estrechamente relacionados con el proceso de integración de la tecnología.

La hoja electrónica puede apoyar el aprendizaje del álgebra.

El álgebra vista más allá de la manipulación de expresiones, ecuaciones, resolución de ecuaciones y problemas verbales algebraicos (Kieran, 2006; Kaput, 1999; NCTM, 2003).

Donde la generalización y la expresión de la generalidad en lenguajes cada vez más formales empieza desde aritmética y modelación de situaciones. Esta generalización se considera una ruta para profundizar en el aprendizaje del álgebra (Kaput, 1999).



La hoja electrónica permite partir de la familiaridad con las estructuras aritméticas de los estudiantes para apoyar la expresión de la generalidad mediante notación de esta herramienta; la cual es vista como lenguaje mediador entre el lenguaje natural y algebraico de los alumnos (Haspekian, 2005).



# Participantes

- Los procedimientos que aquí se muestran pertenecen a un grupo de estudiantes de Bachillerato, quienes estaban cursando su primer semestre correspondiente a álgebra.

## Forma de trabajo en el aula

- Consistió en la resolución del problema en parejas, exposición de procedimientos, discusión grupal y cierre de la actividad.



# Resultados

# Técnica de una pareja

Trabajo de rutina: vaciado de información.

Análisis simultáneo de relaciones entre los datos del problema.

	A	B	C	D	E	F	G
1	CUADERNOS	GASTO	SUBTOTAL	PLUMONES	GASTO	SUBTOTAL	TOTAL
2	450	2	900	300	1	300	1200
3	450	3	1350	300	1.5	450	1800
4	450	5	2250	300	2.5	750	3000
5	450	7	3150	300	3.5	1050	4200
6	450	9	4050	300	4.5	1350	5400
7	450	11	4950	300	5.5	1650	6600
20	450	37	16650	300	18.5	5550	22200

	A	B	C	D	E	F	G
1	CUADERNOS	GASTO	SUBTOTAL	PLUMONES	GASTO	SUBTOTAL	TOTAL
2	450	2	=A2*B2	300	1	=E2*D2	=C2+F2
3	450	3	=B3*A3	300	=E2+0.5	=E3*D3	=C3+F3
4	450	=B3+2	=B4*A4	300	=E3+1	=E4*D4	=C4+F4
5	450	=B4+2	=B5*A5	300	=E4+1	=E5*D5	=C5+F5
6	450	=B5+2	=B6*A6	300	=E5+1	=E6*D6	=C6+F6
7	450	=B6+2	=B7*A7	300	=E6+1	=E7*D7	=C7+F7
20	450	=B19+2	=B20*A20	300	=E19+1	=E20*D20	=C20+F20

No se observa la relación  $B=2E$  o  $E=B/2$ , escrita de manera explícita, sino procesos recursivos en las columnas B y E, cuyo valor epistémico tuvo repercusión en la discusión que se dio posteriormente.

# Otra técnica (mostrada en sesión grupal)

- Tampoco explicitaron la relación entre las celdas B y D con una fórmula (costo de plumones y cuadernos).

	A	B	C	D	E
1	CUADERNOS	COSTO	PLUMONES	COSTO	GASTO
2	450	11	300	5.5	6600
3	4950		1650		6600
4					

	A	B	C	D	E
1	CUADERNOS	COSTO	PLUMONES	COSTO	GASTO
2	450	11	300	5.5	6600
3	=A2*B2		=C2*D2		=A3+C3
4					

## Discusión grupal

En la discusión grupal, derivado de la presentación de parejas y discusión orientada por la docente el grupo logró identificar y simbolizar la ecuación:  
 $450x+300y=6600$ .

Sin embargo, la otra ecuación del sistema fue difícil explicitarla y simbolizarla durante la actividad grupal. Al final se escribió:


$$y = \frac{x}{2}$$

# Conclusiones

- Los estudiantes comprendieron las relaciones que se establecían entre los datos del problema. Es decir, las representadas por el sistema:

$$\begin{cases} 450x + 300y = 6600 \\ x = 2y \end{cases}$$

- Sin embargo, no explicitaron con lenguaje de Excel la segunda ecuación (ecuación del sistema); esto se relacionó de manera directa con la dificultad posterior de explicitarla tanto en lenguaje verbal como simbólico en la discusión grupal.
- El avance logrado en cada uno de los equipos, la presentación de técnicas de solución del problema en la sesión grupal y la interacción del grupo con la docente permitió al grupo acceder a un nuevo nivel de comprensión del problema, diferente completamente al de la hoja electrónica.
- El valor epistémico de la técnica utilizada permitió la escritura de una de las ecuaciones pero no de la otra.

- 
- En el uso que se le dio a la hoja electrónica (técnica) se observa la interacción de los estudiantes con conceptos algebraicos como incógnita y variable, en ambos procedimientos.
  - Pero sobre todo, se observan formas de pensamiento algebraico como la generalización y expresión de esa generalidad usando lenguajes propios de la herramienta.

Las técnicas (o procedimientos), por su valor pragmático y epistémico, permiten acceder a las formas de pensamiento y conceptos algebraicos de los estudiantes.

# Referencias

- Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245-274.
- Artigue, M. (2007). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. [CD-ROM]. En E. Mancera & C. A. Pérez (Eds.), *Historia y Prospectiva de la Educación Matemática Memorias de la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Archivo: Memoria CIAEM 2007. México: Edebé Ediciones Internacionales S.A. de C.V.
- Haspekian, A. (2005). An “Instrumental approach” to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10, 109-141.
- Kaput, J. J. (1999). Teaching and Learning a new Algebra. En E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics Classrooms That Promote Understanding* (pp. 133-155). USA: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the psychology of mathematics education*. (pp. 11-49). Netherlands: Sense Publishers.
- Lagrange, J. B. (1999). Complex Calculators in the Classroom: Theoretical and Practical Reflections on Teaching Pre-Calculus. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 4, 51–81.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios para la Educación Matemática*. (M. Fernández, Trad.). España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. (Trabajo original publicado en 2000).
- Vargas, V. & Guzmán, J. (2007b). Processes of symbolization derived in the use of Spreadsheet [CD-ROM]. En T. Lamberg & L. R. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29<sup>th</sup> annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Archivo: Proceedings 2007/Algebraic Thinking/Research Report. Stateline (Lake Tahoe), NV: University of Nevada, Reno: PME-NA.