INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN COMPUTACIÓN

La Matemática en la Inteligencia Artificial

Dr. Cornelio Yáñez Márquez

Grupo Alfa-Beta

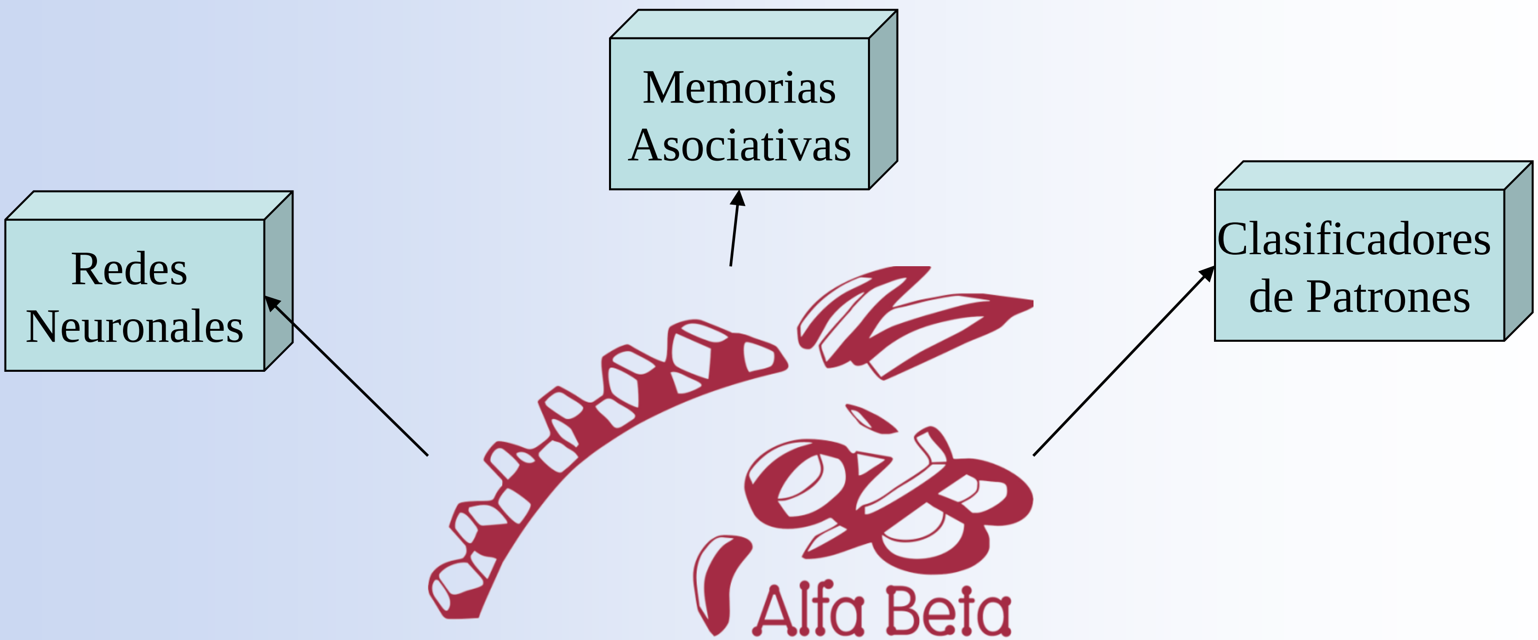
Día Virtual CUDI de Matemáticas

21 de agosto de 2008

Matemática en la Inteligencia Artificial

- Panorama Histórico de Redes Neuronales y Memorias Asociativas
- Modelos Clásicos
- Modelos Morfológicos
- Memorias Asociativas Alfa-Beta
- Modelos Asociativos Alfa-Beta
- Aplicaciones Concluidas
- Temas de Tesis Actuales

Matemática en la Inteligencia Artificial



"En igualdad de condiciones la solución más sencilla es probablemente la correcta"
William of Ockham

Panorama Histórico

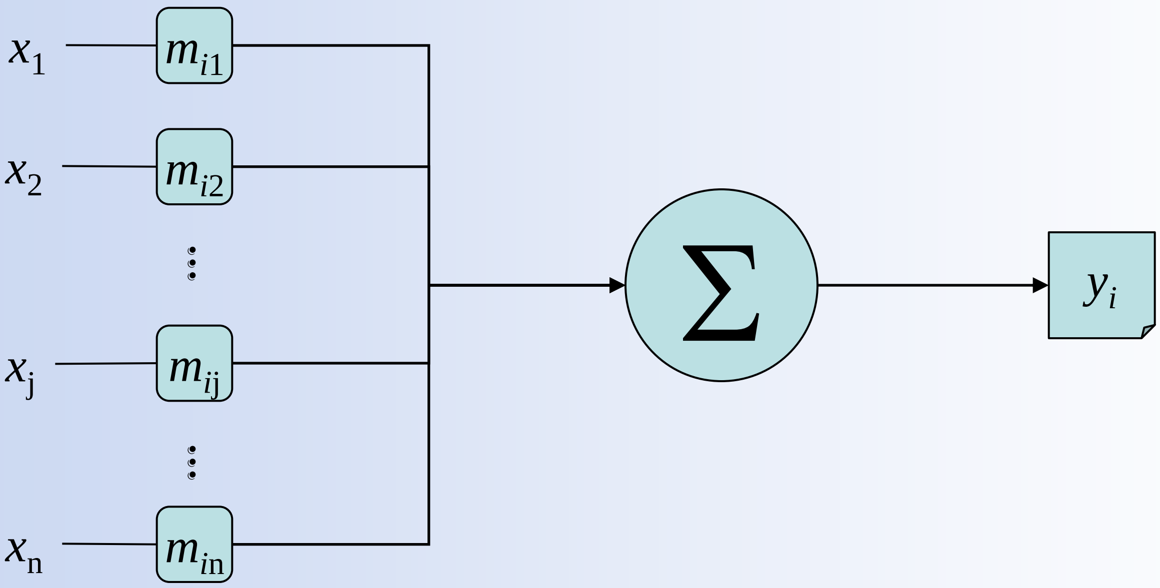
Redes Neuronales

- 1943 McCullock & Pitts: 1er. Modelo de neurona
- 1949 Hebb: Aprendizaje artificial
- 1957 Rosenblatt: *Perceptron*
- 1960 Widrow & Hoff: *ADALINE* (*MADALINE*)
- 1969 Minsky & Papert: *Perceptrons*
- **1982 Hopfield: Modelo RD/MA**
- 1986 Rumelhart, Williams & Hinton: *Backpropagation*

Memorias Asociativas

- 1961 Steinbuch: *Lernmatrix*
- 1969 Wilshw, Buneman & Longuet-Higgins: *Correlograph*
- 1972 Amari: avances teóricos
- 1972 Nakano: *Associatron*
- 1972 Anderson / Kohonen: *Linear Associator*
- **1982 Hopfield: Modelo RD/MA**
- **1996 Ritter et al.: RD/MA Morfológicas**
- **2002 Yáñez: MA Alfa-Beta**

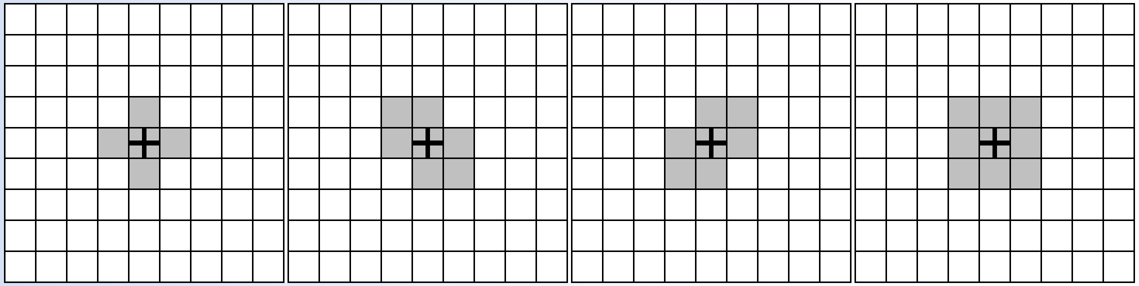
Modelos Clásicos



Suma de Productos

Modelos Morfológicos

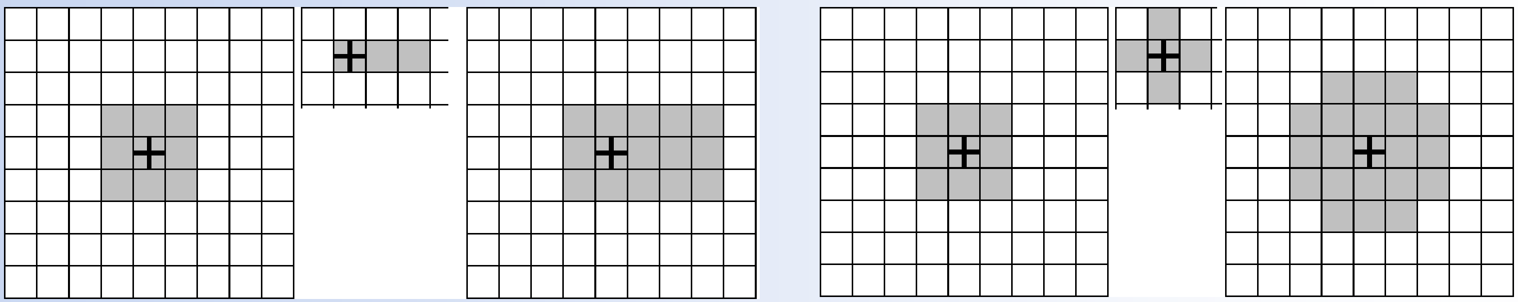
- En 1996 surgen las Memorias Asociativas Morfológicas, inspiradas en los operadores de la Morfología Matemática
  - Dilatación
  - Erosión
  - Apertura
  - Cerradura



Modelos Morfológicos

- Dilatación

$$A \oplus B = \{x \in X \mid x = a + b; \quad a \in A, b \in B\}$$



$$A \oplus B = B \oplus A$$

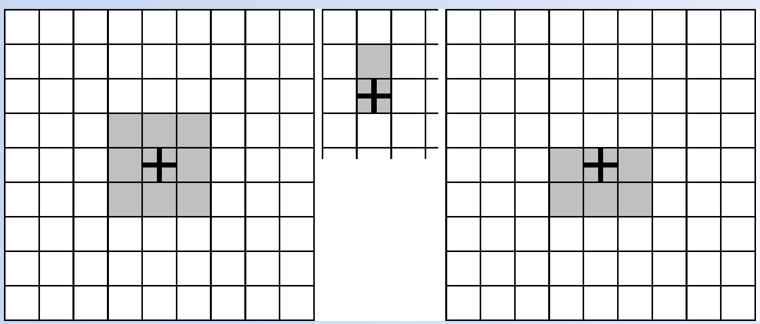
$$A \subseteq C \rightarrow A \oplus B \subseteq C \oplus B$$

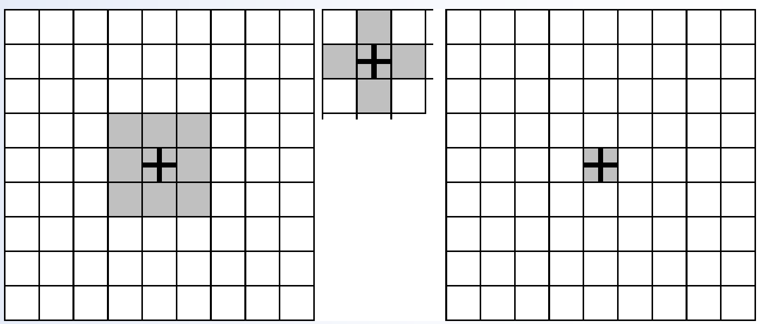
$$(A \cup C) \oplus B = (A \oplus B) \cup (C \oplus B)$$

Modelos Morfológicos

- Erosión

$$A \ominus B = \{ x \in X \mid x + b \in A, \forall b \in B \}$$





$$(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \oplus C)$$

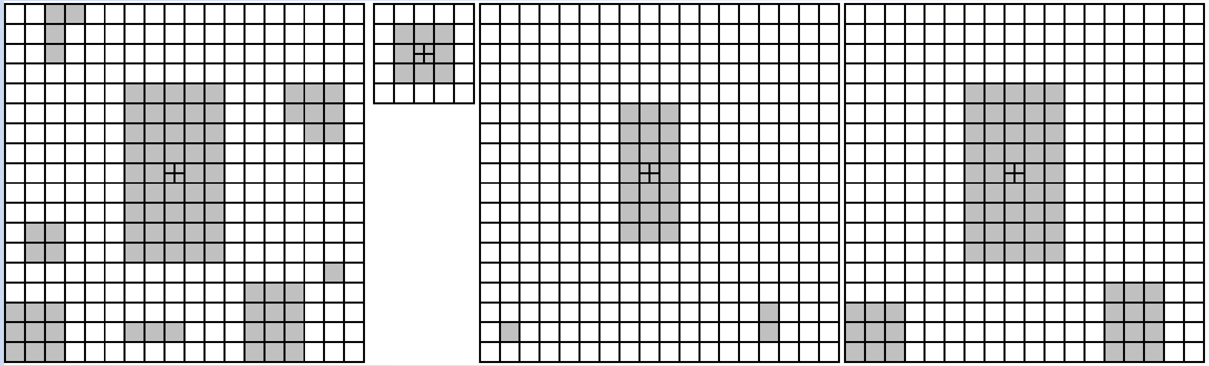
$$A \oplus (B \ominus C) \subseteq (A \oplus B) \ominus C$$

$$A \ominus B \subseteq \mathrm{A}$$

Modelos Morfológicos

- Apertura

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$



$$A \subseteq C \rightarrow A \circ B \subseteq C \circ B$$

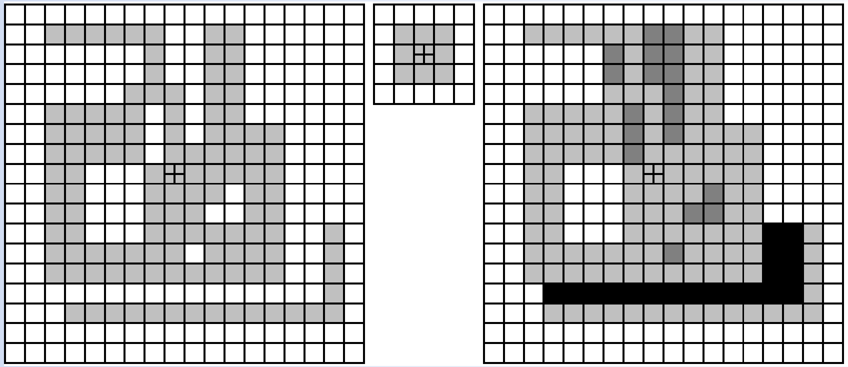
$$A \circ B \subseteq A$$

$$(A \circ B) \circ B = A \circ B$$

Modelos Morfológicos

- Cerradura

$$A \cdot B = (A \oplus B) \ominus B$$

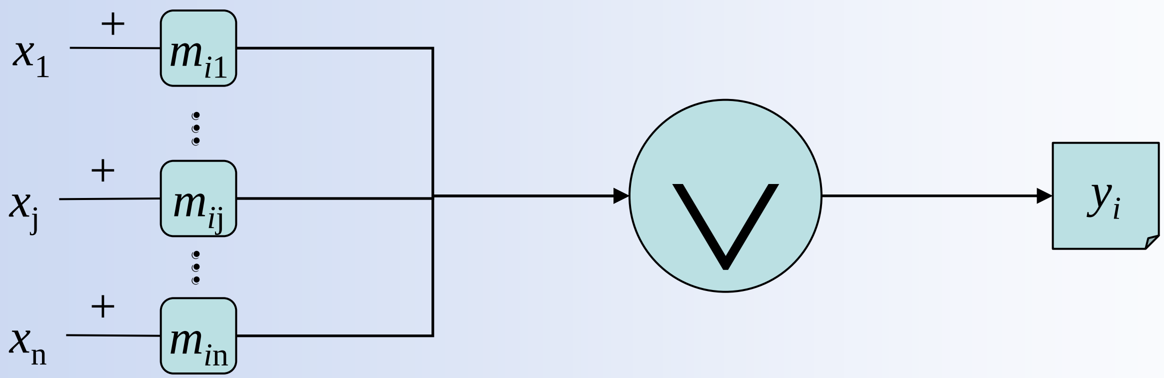


$$A \subseteq C \rightarrow A \cdot B \subseteq C \cdot B$$

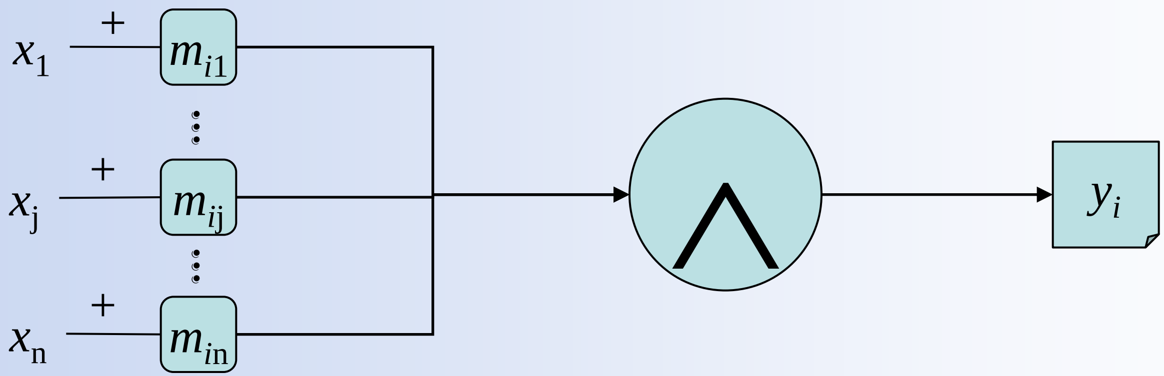
$$A \subseteq A \cdot B$$

$$(A \cdot B) \cdot B = A \cdot B$$

Modelos Morfológicos



Máximo de Sumas



Mínimo de Sumas

Memorias Asociativas Alfa-Beta

- En 2002, en el Grupo Alfa-Beta se crean los operadores Alfa y Beta

$$A = \{0,1\} \qquad B = \{0,1,2\}$$

$$\alpha = A \times A \to B \qquad \beta = B \times A \to A$$

x	y	$\alpha(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	2
1	1	1

x	y	$\beta(x,y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1
2	0	1
2	1	1

Memorias Asociativas Alfa-Beta

- Algunas propiedades de Alfa y Beta:

α1.- isoargumentos en α	$\alpha(x, x) = 1$
β1 - propiedad del 1	$\beta(1, x) = x$
β2 - isoargumentos en β	$\beta(x, x) = x \quad \forall x \in A$
$\alpha\beta$1 - β es la inversa de α por la derecha	$\beta[\alpha(x, y), y] = x$
$\alpha\beta$2 - β es la inversa de α por la izquierda	$\beta[\alpha(x, y), x] = x$
$\alpha\beta$3 - isoargumentos en α como argumento de β	$\beta[\alpha(x, x), y] = y$

Memorias Asociativas Alfa-Beta

- Fase de Aprendizaje

$$\left[y^{\mu} \otimes \left(x^{\mu} \right)^{t} \right]_{m \times n}$$

$$\mathbf{V} = \bigvee_{\mu=1}^{p} \left[y^{\mu} \otimes \left(x^{\mu} \right)^{t} \right]$$

$$v_{ij} = \bigvee_{\mu=1}^{p} \alpha\left(y_i^{\mu}, x_j^{\mu} \right)$$

- Fase de Recuperación

$$\mathbf{V} \Delta_{\beta} x^{\omega}$$

$$\left(\mathbf{V} \Delta_{\beta} x^{\omega} \right)_i = \bigwedge_{j=1}^{n} \beta\left(v_{ij}, x_j^{\omega} \right)$$

Modelos Asociativos Alfa-Beta

- Código Johnson-Möbius Modificado
  1. Sean n números reales $\{r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_n\}$ donde n es un entero positivo.
  2. Restar el número menor a todos; si r_i es el menor:
     $t_j = r_j - r_i \ \forall \ j \in \{1, 2, \ldots, n\}$
  3. Escalar los números anteriores por d, truncando los decimales restantes:
     $e_i = t_i * d$
  3. Concatenar $(e_m - e_j)$ ceros con e_j unos

Decimal	Johnson-Möbius modificado
0	0000
1	0001
2	0011
3	0111
4	1111

Modelos Asociativos Alfa-Beta

- Clasificador Gama

$$u_{\beta}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \beta(x_i, x_i)$$

$$\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } n - u_{\beta}[\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bmod 2] \leq \theta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$c_i = \frac{\sum_{\omega=1}^{k_i} \sum_{j=1}^{n} \gamma_g\left(x_j^{i\omega}, y_j, \theta\right)}{k_i}$$

Modelos Asociativos Alfa-Beta

- Multimemorias Heteroasociativas Alfa-Beta
  - Conjunto Fundamental

$$\rho(\mathbf{x}^{\alpha}, q) = \left\{\mathbf{x}^{\alpha 1}, \mathbf{x}^{\alpha 2}, \ldots, \mathbf{x}^{\alpha q}\right\}$$

$$\{(\rho(\mathbf{x}^{\mu}, q), \mathbf{y}^{\mu}) \mid \mu = 1, 2, \ldots, p\}$$

$$\left\{(\mathbf{x}^{\mu 1}, \mathbf{y}^{\mu}), (\mathbf{x}^{\mu 2}, \mathbf{y}^{\mu}), \ldots, (\mathbf{x}^{\mu q}, \mathbf{y}^{\mu}) \mid \mu = 1, 2, \ldots, p\right\}$$

  - Fase de Aprendizaje

$$\left[\mathbf{y}^{\mu} \nabla \left(\mathbf{x}^{\mu l}\right)^{t}\right]_{m \times \left(\frac{n}{q}\right)}$$

$$v_{ij}^{l} = \bigvee_{\mu=1}^{p} \alpha(y_i^{\mu}, x_j^{\mu l})$$

Modelos Asociativos Alfa-Beta

- Multimemorias Heteroasociativas Alfa-Beta
  - Fase de Recuperación

$$\rho(\mathbf{x}^{\varpi}, q) = \left\{\mathbf{x}^{\varpi 1}, \mathbf{x}^{\varpi 2}, \ldots, \mathbf{x}^{\varpi q}\right\}$$

$$z^{\varpi l} = V^{l} \Delta_{\beta} \mathbf{x}^{\varpi l}$$

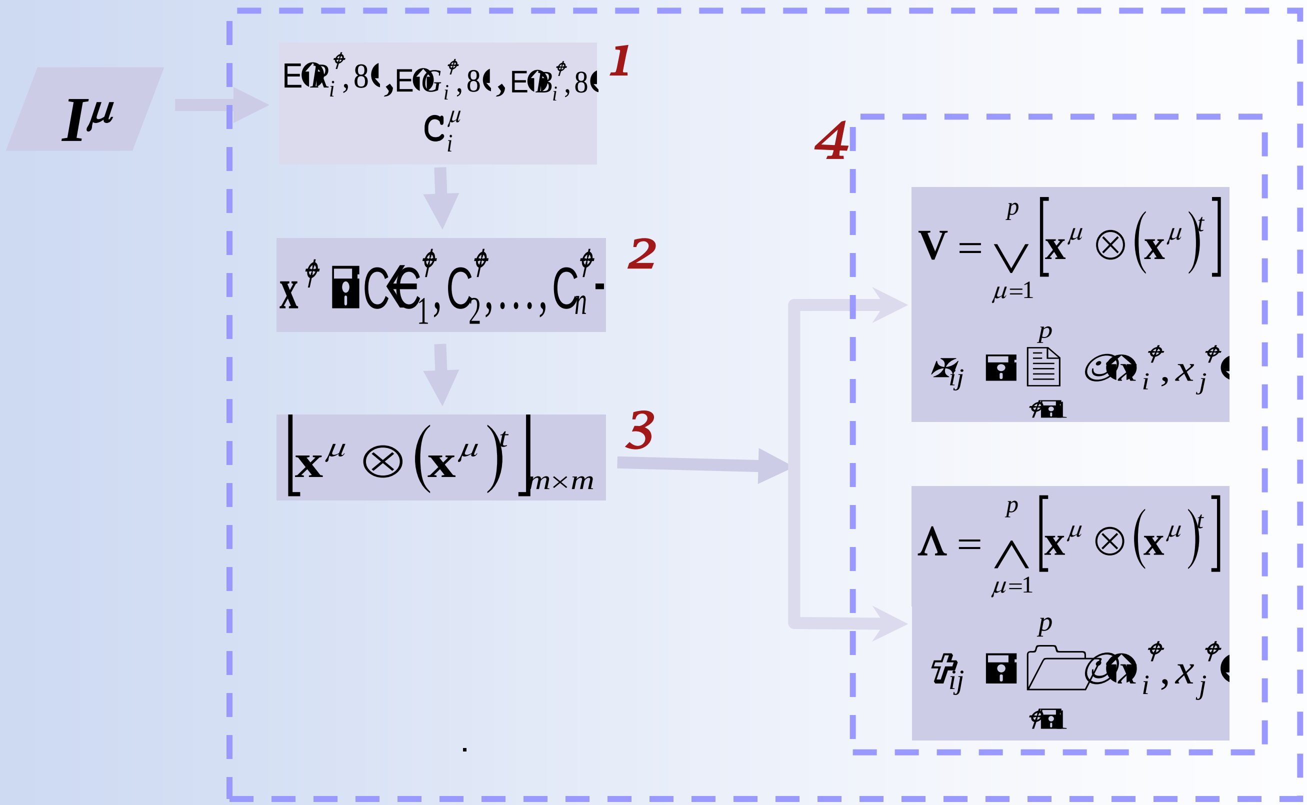
$$z_i^{\varpi l} = \bigwedge_{j=1}^{n} \beta(v_{ij}^{l}, x_j^{\varpi l})$$

$$I_i^{\varpi} = \sum_{l=1}^{q} z_i^{\varpi l}$$

$$y^{\varpi} = \begin{cases} 1 & I_i^{\varpi} = \bigvee_{k=1}^{p} I_k^{\varpi} \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$$

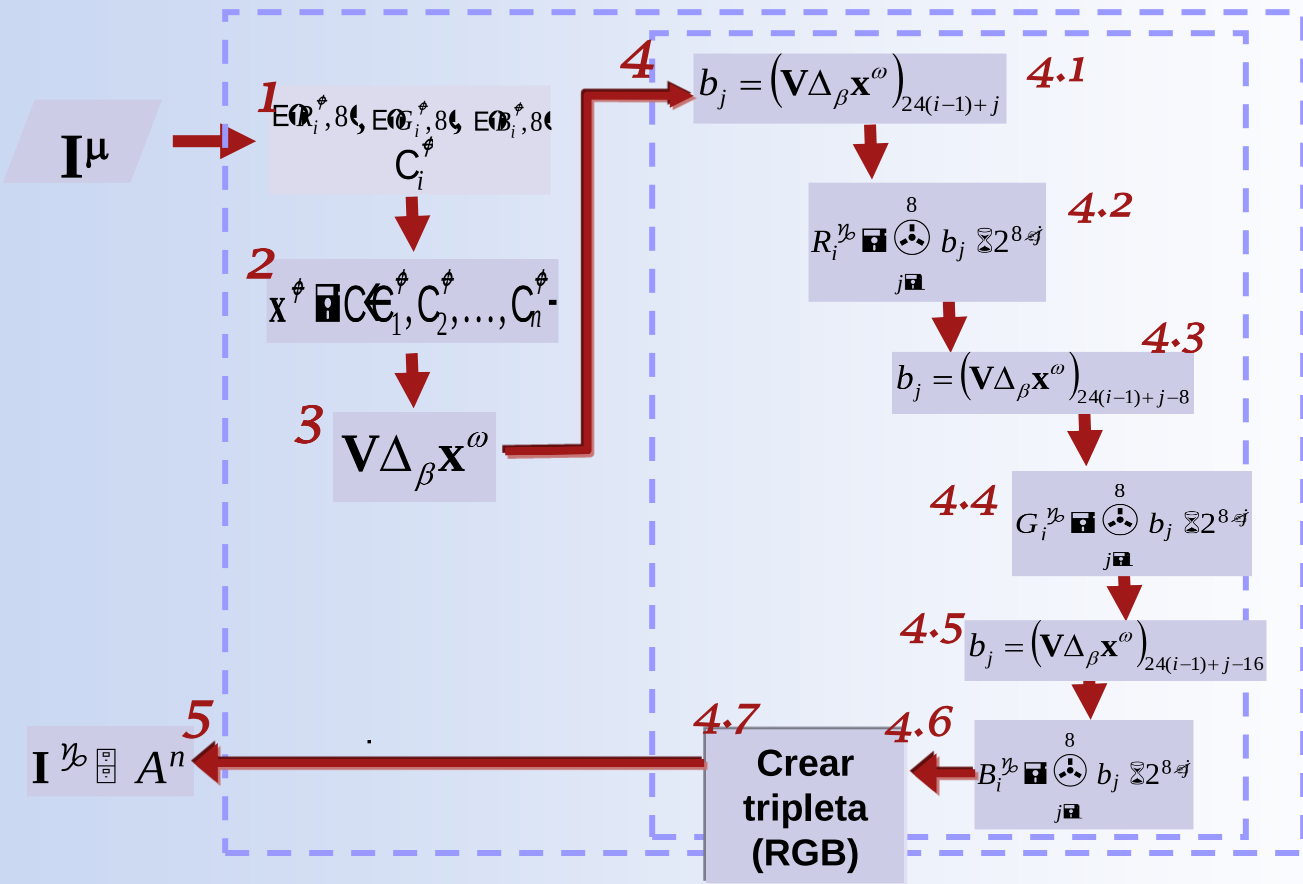
Modelos Asociativos Alfa-Beta

- Memorias Asociativas Alfa-Beta para Imágenes RGB
  - Fase de Aprendizaje



Modelos Asociativos Alfa-Beta

- Memorias Asociativas Alfa-Beta para Imágenes RGB
  - Fase de Recuperación



Modelos Asociativos Alfa-Beta

- Extensión de la Lernmatrix
  - Fase de Aprendizaje

$$m_{ij} = m_{ij} + \Delta m_{ij}$$

$$\Delta m_{ij} = \begin{cases} +\varepsilon & \text{si } y_i^\mu = 1 = x_i^\mu \\ -\varepsilon & \text{si } y_i^\mu = 1 \text{ y } x_i^\mu = 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \text{ tal que } m_{ij} > 0$$

  - Fase de Recuperación

$$z_i^\omega = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j^\omega = \bigvee_{h=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} m_{hj} x_j^\omega \right] \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } s_i = \bigwedge_{k=1}^{p} s_k \text{ tal que } z_k^\omega = 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Aplicaciones Concluidas

- Memorias asociativas Alfa-Beta basadas en el código Johnson-Möbius modificado
  Igualación Industrial de Color
- Aprendizaje y recuperación de imágenes en color mediante memorias asociativas Alfa-Beta
- Aplicación de los modelos asociativos Alfa-Beta a la Bioinformática
- *Efficient Pattern Recalling using Parallel Alpha-Beta Associative Memories*
  Implementación en Hardware
- *Alpha-Beta Bidirectional Associative Memories Based Translator*
  Traductor basado en Alfa-Beta BAM
- *Optimized Implementation of a Pattern Classifier using Feature Set Reduction*
  Selección de Rasgos
- Clasificador automático de alto desempeño
  Clasificador Gama

Temas de Tesis Actuales

- Criptografía
- Estimación del esfuerzo en desarrollo de sistemas
- Reconocimiento de caracteres escritos
- Detección de hipoacusia por medio de voz
- Alineación de cadenas genéticas
- Reducción de dimensionalidad de problemas
- Autómatas Celulares – Memorias Asociativas
- Predicción de formas tridimensionales de biomoléculas
- Detección de anormalidades en línea de producción
- Predicción de trayectorias para Hand-Off
- Predicción de datos ambientales
- Clasificación de estados emocionales

¡ Gracias !

Thanks !

Xie xie ni

Domo arigatou