Las matemáticas y los mayas

LUIS FERNANDO MAGAÑA*

Fray Diego de Landa, fue uno de los primeros misioneros españoles que realizaron su labor evangelizadora en Yucatán durante el siglo XVI, y pasó a la historia por el tristemente célebre auto de fe de Maní (en Yucatán). Como hombre representativo de su tiempo, Fray Diego de Landa tenía temor de lo que no entendía y en consecuencia, lo destruía; así, en Maní, Fray Diego de Landa incineró toneladas de manuscritos mayas, los que hasta entonces, habían sido celosamente guardados por los caciques locales. Estos hombres eran los jefes de las diversas tribus en las que se había convertido la poderosa confederación de Mayapán, que antes agrupaba a las cultas y ricas ciudades de Chichén Itzá, Uxmal y Mayapán. Una terrible y prolongada guerra, en la que sólo hubo perdedores, había sido la causante de esta ruina. En aquella época, gran parte de los profundos conocimientos astronómicos, matemáticos, agrícolas, arquitectónicos, médicos, sociales, de técnicas de riego, de ingeniería, de geografía, etc., que desarrollaron los mayas, habían sido consignadas en esos documentos por su casta sacerdotal. Otra parte de sus conocimientos, mucho menor, había trascendido ya al dominio de la gente común y se conservaba por tradición oral. Entre éstos se encuentran, hasta la fecha, los hábitos de higiene, el gran respeto por la vida humana y por la propiedad ajena, paralelamente a un gran respeto por la labor y la propiedad comunales (para tener idea de los logros de la civilización maya, el lector puede consultar las obras 1, 2 y 4 de la bibliografía recomendada). Curiosamente, y quizá como un recuerdo colectivo de la catastrófica guerra, existe en la cultura de los actuales mayas, un respeto casi religioso a las ruinas de sus antiguas ciudades.

Uno de los conocimientos que eran ya del dominio de la gente común y que hasta hace cuando menos unos 40 años por transmisión oral, se conservaban intactos entre algunos de los albañiles de Yucatán, es el método para hacer sumas y multiplicaciones. El mismo Fray Diego de Landa en su Relación de las Cosas de Yucatán, escrita en el siglo XVI, relata la "manera de contar de los naturales de esta tierra ..., utilizando piedras y varitas en el piso o cosa llana". Este método que entre los estudiosos de la cultura maya se conoce como el del "ábaco maya", es sencillo e intrigante y no requiere de la memorización de las tablas de multiplicar.

Es bien sabido que el sistema de numeración de los mayas es vigesimal (esto es, de base 20) y posicional, con la utilización del cero. Hay que remarcar que nuestro sistema numérico actual es decimal (esto es, de base 10) y posicional. Al decir posicional nos referimos a que cada signo tiene un valor de acuerdo con la posición que ocupa en la representación del número. El cero es una abstracción que, al parecer, lograron solamente dos culturas en la humanidad: la cultura maya y la

* Instituto de Física, UNAM.

hindú. Las evidencias actuales indican que este descubrimiento lo realizaron por separado y que los mayas se anticiparon a los hindúes por un poco más de seiscientos años.

También es muy conocido el hecho de que el calendario astronómico maya era extraordinariamente preciso. Los mayas tenían un año civil fijo de sólo 365 días de duración para medir un fenómeno astronómico que, según los conocimientos modernos requiere de 365.2422 días para efectuarse. La fórmula calendárica de corrección, concebida por los antiguos sacerdotes astrónomos mayas, aparentemente entre los siglos VI y VII de nuestra era, era más exacta que nuestra propia corección gregoriana del año bisiesto, que no se introdujo sino hasta 1582. Esto puede verse en las siguientes cifras tomadas del

libro *La Civilización Maya*, de S. Morley (Fondo de Cultura Económica, México, segunda edición en español, 1972):

Duración del año según la astronomía moderna:	365.2422 días.
Duración de nuestro antiguo año Juliano:	365.2500 días.
Duración de nuestro actual año Gregoriano:	365.2425 días.
Duración del año según los mayas:	365.2420 días.

Es claro que sin una base matemática suficientemente precisa, no hubiesen podido desarrollar tal perfección en su medida del tiempo.

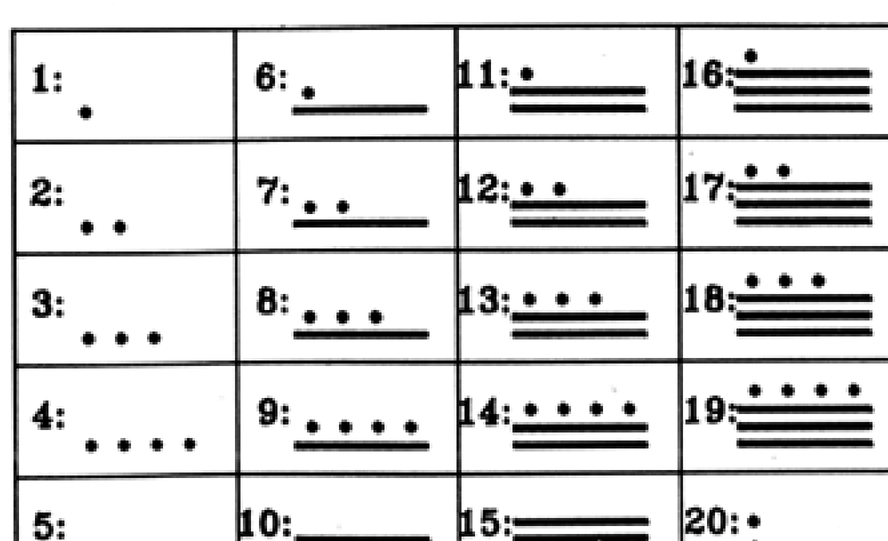
Los mayas utilizaban solamente tres signos para representar cualquier número imaginable. Estos signos son: el punto (·), la raya (——), y el cero, que representaban con dibujos diversos, de acuerdo con la importancia del documento en que se estuviese utilizando. Lo más frecuente era utilizar la figura de un caracol, como la que la Sociedad Mexicana de Física utiliza en la portada de la *Revista Mexicana de Física*. La Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional tiene, en su escudo, una representación del cero más frecuentemente utilizada por los mayas en sus códices. Con solamente estos tres signos los mayas podían realizar operaciones de suma, resta, multiplicación, división, raíz cuadrada y raíz cúbica. De hecho, todas las operaciones que podemos realizar con nuestro actual sistema numérico pueden ser realizadas con el sistema de numeración maya, ya que, formalmente, son completamente equivalentes.

Para mayor claridad, veamos primeramente cómo representamos actualmente un número en nuestro sistema decimal. Por ejemplo tomemos el número 3472. Este número es equivalente a la suma:

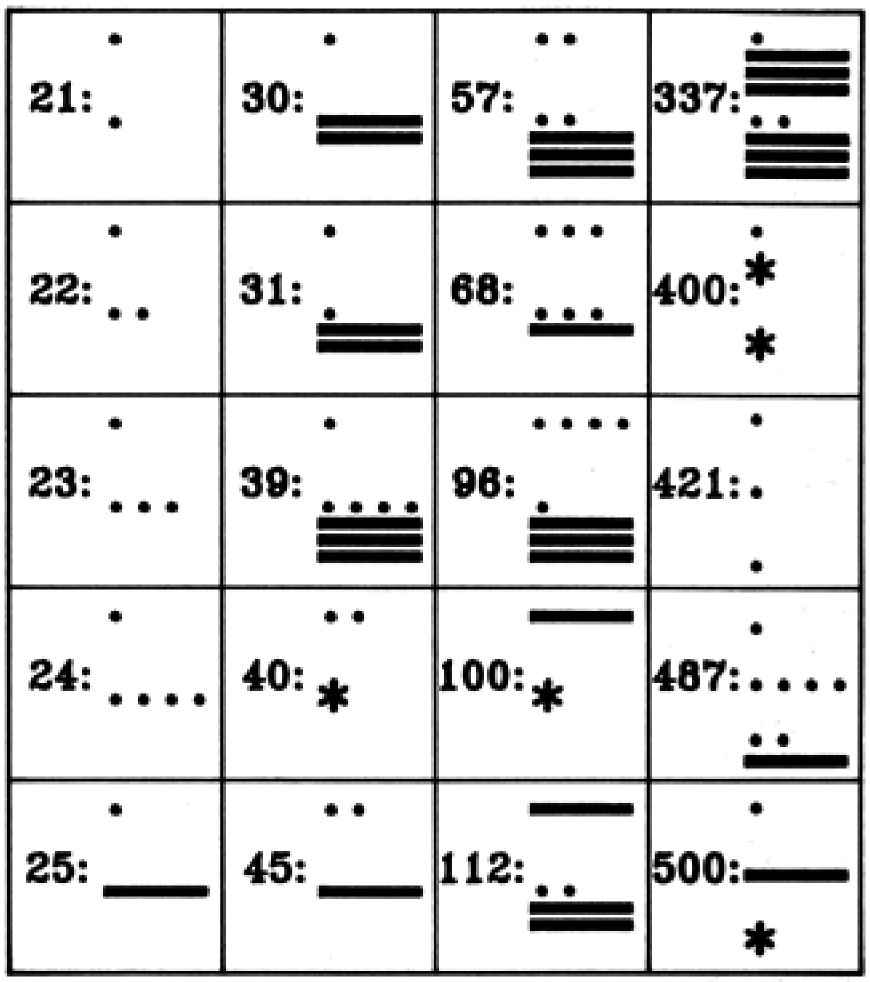
$$3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

(recuérdese que $10^0 = 1$). De este modo podemos imaginar que la posición de cada dígito se refiere a una potencia de 10 (que es la base del sistema numérico) y que existe una suma implícita al escribir el número.

Veamos cómo en el sistema de los mayas, se representan algunos de nuestros números:



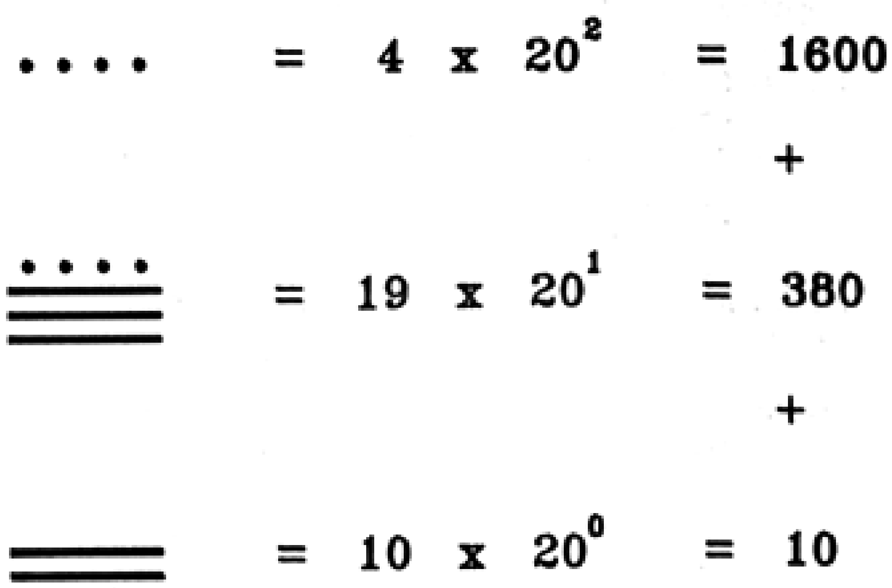
Nótese cómo en el número veinte ya estamos haciendo uso de la notación posicional y del cero, que aquí estamos representando por un asterisco (*). Veamos la representación de algunos otros números:



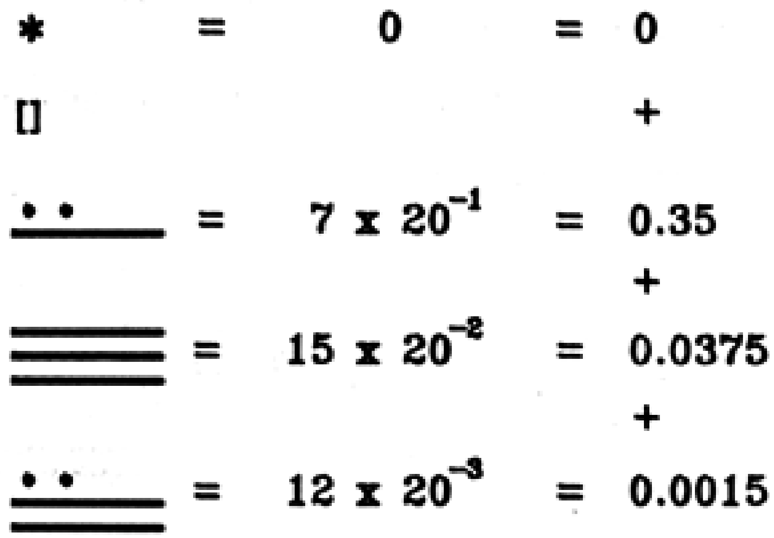
Expliquemos un poco más. Creo que al lector le empieza a ser claro que existe una notación posicional y por bloques, tal como ocurre en nuestro sistema de numeración decimal. Pero en posición vertical. Esto es:

[ ] ________	$20^5 =$	3 200,000
[ ] ________	$20^4 =$	160,000
[ ] ________	$20^3 =$	8,000
[ ] ________	$20^2 =$	400
[ ] ________	$20^1 =$	20
[ ] ________	$20^0 =$	1
[ ] ________	$20^{-1} =$	0.05
[ ] ________	$20^{-2} =$	0.0025
[ ] ________	$20^{-3} =$	0.000125

Así, los números quedan expresados en potencias de 20. Cada bloque, como ocurre en nuestro sistema decimal, se refiere a una potencia de 20 y existe una suma implícita. Veamos cómo se escribe el año en que este artículo está siendo escrito: 1990.



Una fracción como 0.389 queda como:



Estamos utilizando dos paréntesis cuadrados [ ], para referirnos a la separación entre números mayores que el uno y las fracciones. Esto correspondería a nuestro punto decimal (aquí lo llamaríamos punto vigesimal). No sabemos qué signo utilizaban los mayas para hacer esta separación entre números enteros y fracciones. Sin embargo es bastante claro que el sistema numérico que utilizaban tenía la suficiente flexibilidad como para utilizar fracciones.

OPERACIONES ARITMÉTICAS

Supongamos ahora que utilizamos una cierta base b, para representar algunos números con los cuales queremos realizar operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación, división, potenciación, extracción de raíces, etc. Sea A un número tal que

$$A = c_0 b^0 + c_1 b^1 + c_2 b^2 + ... + c_n b^n \quad (1)$$

y un número B tal que

$$B = d_0 b^0 + d_1 b^1 + d_2 b^2 + ... + d_m b^m \quad (2)$$

y supongamos que m es mayor que n. Nótese que siempre podremos completar la serie de potencias para A hasta el grado m, agregando coeficientes cero a las potencias faltantes y así:

$$A = c_0 b^0 + c_1 b^1 + c_2 b_2 + ...+ c_n b^n + 0b^{n+1} ... + 0b^m \quad (3)$$

Si ahora queremos referirnos a la numeración maya tomamos b = 20.

SUMA

Queremos ilustrar cómo podían los mayas, con una sencilla cuadrícula, efectuar sus operaciones aritméticas. Es claro que, dado que las numeraciones decimal nuestra y la vigesimal de los mayas son formalmente equivalentes, las demostraciones que hagamos para la numeración maya serán también válidas para nuestra numeración decimal. Veamos la suma A + B:

$$A + B = c_0 b^0 + c_1 b^1 + c_2 b^2 + ... + c_n b^n + 0b^{n+1} ... + 0b^m + d_0 b^0 + d_1 b^1 + d_2 b^2 + ... + d_m b^m \quad (4)$$

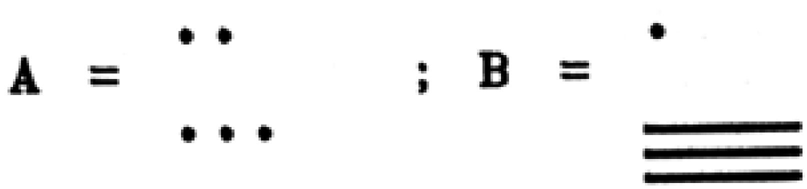
Y si agrupamos los términos con las mismas potencias:

$$A + B = (c_0 + d_0)b^0 + (c_1 + d_1)b^1 + (c_2 + d_2)b^2 + \ldots + (c_n + d_n)b^n + \ldots + (0 + d_m)b^m \qquad (5)$$

Veamos ahora el método práctico de los mayas al sumar: Tomemos A = 43 y B = 35. Tenemos:

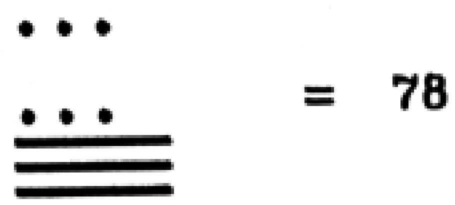
$$A = 3 \times 20^0 + 2 \times 20^1 = 43 \,;\, B = 15 \times 20^0 + 1 \times 20^1 = 35.$$

En la notación maya:



Aquí claramente m es 1. Hagamos una cuadrícula con m cuadros por lado.

En la primera columna colocamos A y en la segunda columna colocamos B. Ahora juntemos todos los puntos y todas las rayas a una tercera columna a la derecha de las dos primeras. Esta tercera columna será el resultado de sumar A y B. El resultado final es:

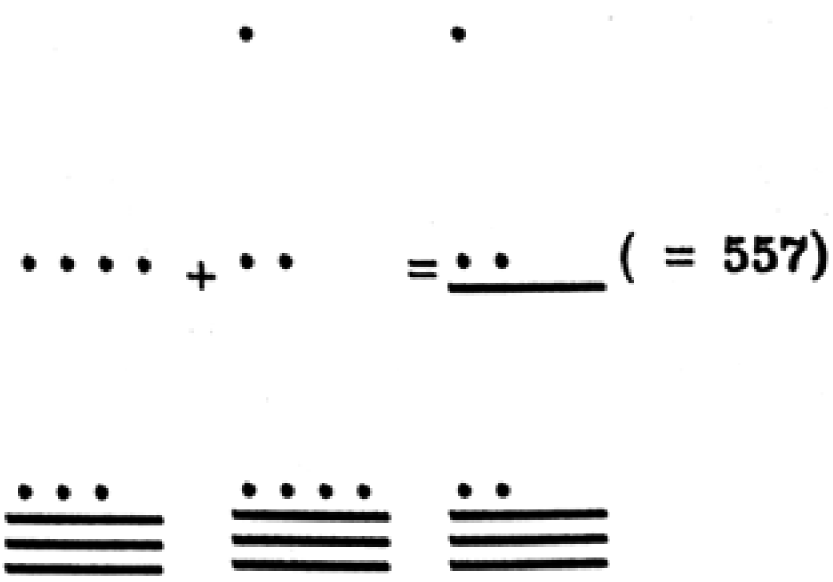


Claro que en la notación maya el resultado final es el que está expresado en puntos y rayas. Es cuestión de costumbre.

Veamos ejemplos más complicados de sumas. Sea A = 98 y B = 459. En base vigesimal:

$$A = 18 \times 20^0 + 4 \times 20^1 \,;\, B = 19 \times 20^0 + 2 \times 20^1 + 1 \times 20^2$$

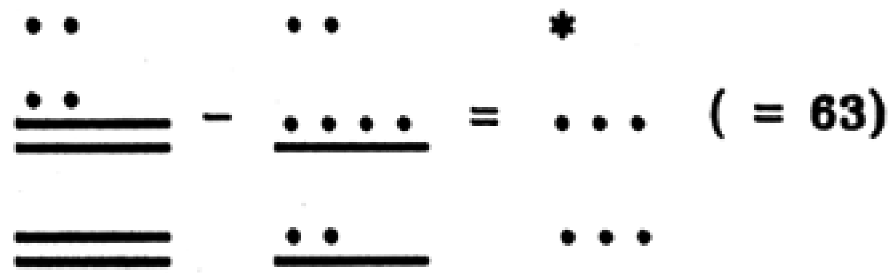
que en la notación maya es:



Aquí hemos seguido la regla de que cada cinco puntos nos da una raya y que cada cuatro rayas nos da un punto en el bloque superior. Al estilo nuestro, que al sumar, "llevamos" una decena o una centena.

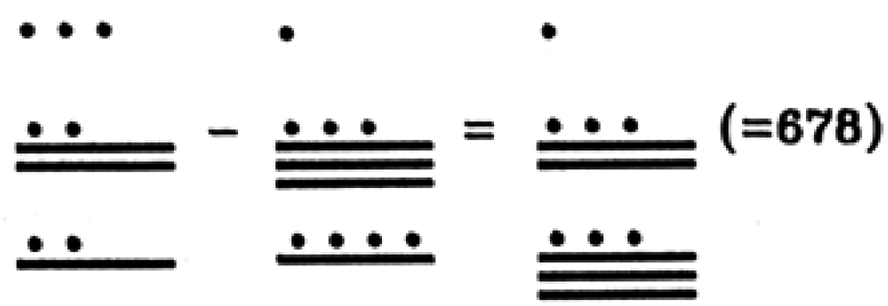
RESTA

Para este caso, tenemos una completa analogía con la suma. Por ejemplo, restemos B = 987 de A = 1050. Tenemos :



Nótese que fácil es si pensamos que rayas cancelan rayas y que cinco puntos cancelan una raya. Pensando de este modo el resultado se obtiene automáticamente sin tener que volverse a acordar de nuestro sistema decimal arábigo de 10 signos.

Hagamos una resta un poco más complicada. Por ejemplo, tomemos A = 1447 y B = 769 :



Nótese que cuando tenemos más rayas en el número de la derecha que en el número de la izquierda, tomamos prestado un punto de arriba que es equivalente a 4 rayas. Algo análogo se hace con los puntos cuando son insuficientes para efectuar la resta directa.

MULTIPLICACIÓN

La multiplicación, al igual que en nuestro sistema decimal, es un poco más complicada. Sin embargo, siguiendo la metodología maya no se requiere memorizar previamente tablas de multiplicar, algo a lo que estamos acostumbrados.

Tomemos la notación de las igualdades (1), (2), (3) y realicemos el producto de A x B , suponiendo nuevamente que m es mayor que n :

$$\begin{aligned} A \times B &= (c_0 b^0 + c_1 b^1 + c_2 b^2 + \ldots + c_n b^n + 0b^{n+1} + \ldots + 0b^m) \times (d_0 b^0 + d_1 b^1 + d_2 b^2 + \ldots + d_m b^m) = \\ &= c_0 b^0 (d_0 b^0 + d_1 b^1 + d_2 b^2 + \ldots + d_m b^m) + \\ &\quad c_1 b^1 (d_0 b^0 + d_1 b^1 + d_2 b^2 + \ldots + d_m b^m) + \ldots + \\ &\quad c_m b^m (d_0 b^0 + d_1 b^1 + d_2 b^2 + \ldots + d_m b^m) \end{aligned}$$

que pueden agruparse en factores de las potencias de b. Así, tenemos:

$$\begin{aligned} A \times B &= c_0 d_0 b^0 + c_0 d_1 b^1 + c_0 d_2 b^2 + \ldots + c_0 d_m b^m + \\ &\quad c_1 d_0 b^1 + c_1 d_1 b^2 + c_1 d_2 b^3 + \ldots + c_1 d_m b^{m+1} + \ldots \\ &\quad + c_m d_0 b^m \;\; c_m d_1 b^{m+1} + \ldots + c_m d_m b^{m+m} \end{aligned}$$

De esta manera, podemos escribir una matriz donde cada sitio corresponda a una potencia de b :

$$\begin{array}{cccccc} b^0 & b^1 & b^2 & b^3 & \ldots & b^m \\ b^1 & b^2 & b^3 & b^4 & \ldots & b^{m+1} \\ b^2 & b^3 & b^4 & b^5 & \ldots & b^{m+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b^m & b^{m+1} & b^{m+2} & b^{m+3} & \ldots & b^{m+m} \end{array}$$

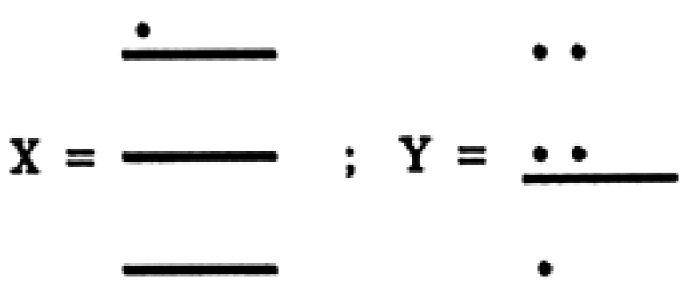
Si ahora en el lugar de cada potencia de b, ponemos sus correspondientes coeficientes, tenemos :

$$\begin{array}{ccccc} c_0d_0 & c_0d_1 & c_0d_2 & \ldots & c_0d_m \\ c_1d_0 & c_1d_1 & c_1d_2 & \ldots & c_1d_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_md_0 & c_md_1 & c_md_2 & \ldots & c_md_m \end{array}$$

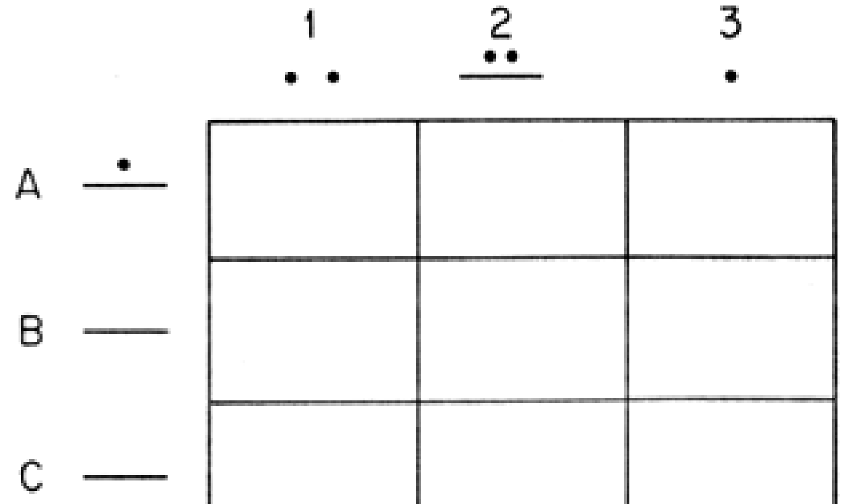
También podemos escribir este arreglo para la suma como:

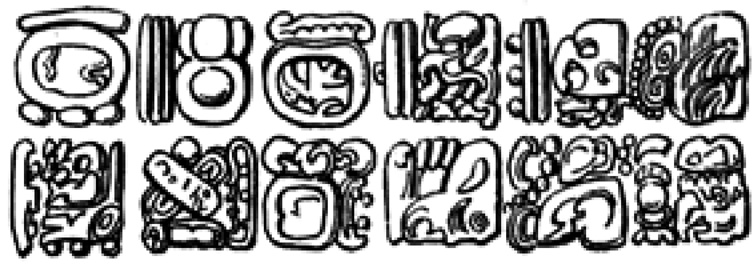
$$\begin{array}{cccc} c_md_m & c_md_{m-1} & \ldots & c_md_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_1d_m & c_1d_{m-1} & \ldots & c_1d_0 \\ c_0d_m & c_0d_{m-1} & \ldots & c_0d_0 \end{array}$$

Así, si queremos representar el producto de A por B, podemos representarlo con la matriz anterior. Es interesante notar que los coeficientes en líneas paralelas a la diagonal que tiene su parte inferior en el lado izquierdo de la matriz (a la que llamaremos por simplicidad M), son de las mismas potencias de b. En esta característica se basa el método de multiplicación de los mayas. Por ejemplo, sea X = 2505 ; Y = 941. En la notación maya tenemos que:

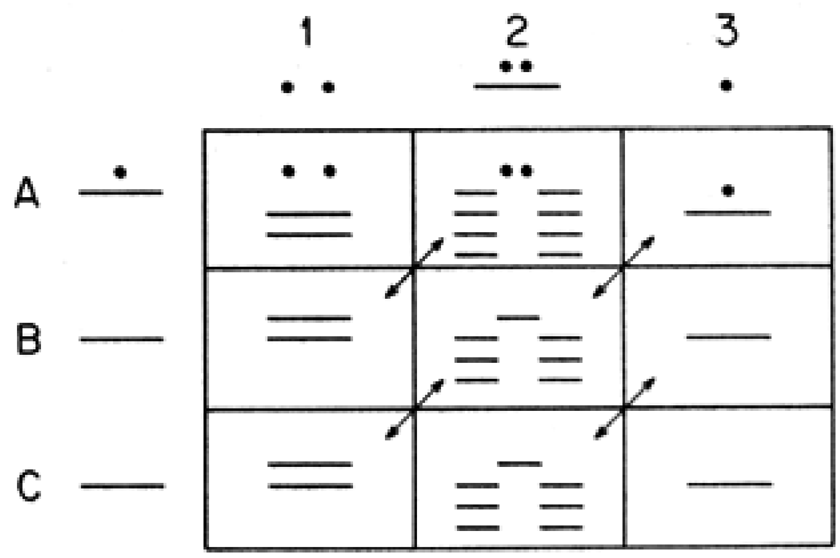


Acomodemos estos números para hacer la multiplicación. En la columna vertical está el número 2505 y en la parte horizontal, el número 941.



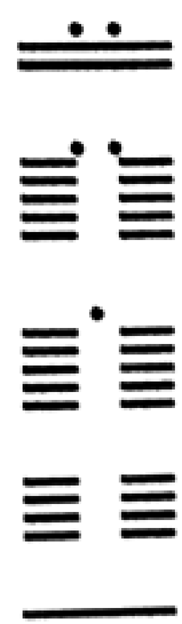


Ponemos en las casillas de la cuadrícula (o "ábaco maya") los productos parciales. Así, en la casilla A1 se coloca el producto parcial de los signos en el bloque A por los signos en bloque 1. Para hacer esto, por cada signo que aparece en cada casilla de la izquierda (puntos y rayas), ponemos dos en la casilla A1. Análogamente con la B1, con A2, B2, A3 y B3. Obtenemos de este modo:

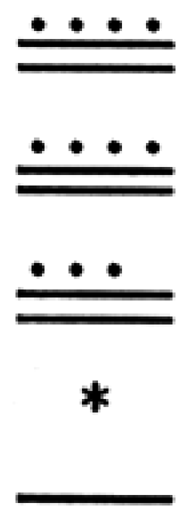


Ahora, construimos una columna cuya base es siempre la casilla inferior derecha y los elementos superiores se construyen con la suma de los números de las casillas de las líneas paralelas a la diagonal M, como indican las flechas.

Obtenemos:

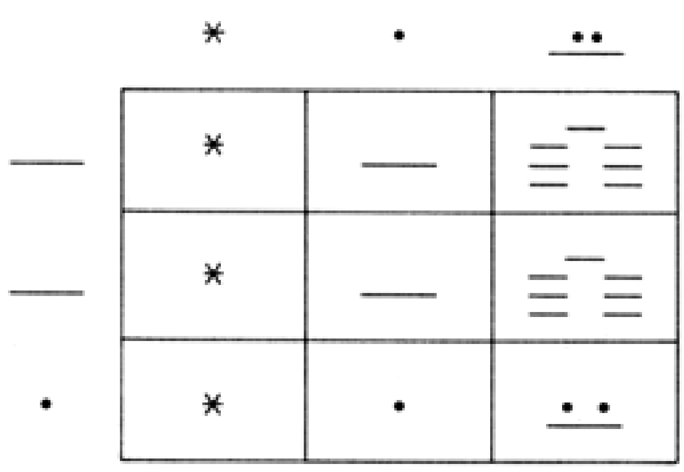


Que se reescribe tomando en cuenta que 5 puntos hacen una raya y que 4 rayas dan un punto en el bloque superior, como:

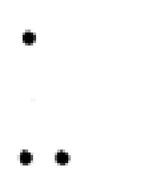


Este número es equivalente a $14 \times 20^4 + 14 \times 20^3 + 14 \times 20^2 + 0 \times 20^1 + 5 \times 20^0 = 2,\ 357,\ 205$. Por otro lado tenemos que: $2\ 505 \times 941 = 2,\ 357,\ 205$.

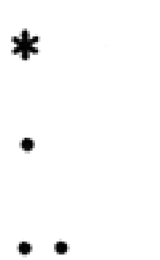
Veamos un ejemplo más de multiplicaciones. Consideremos el caso de $Y = 2\ 101$; $Z = 27$. Hagamos el producto de estos dos números:

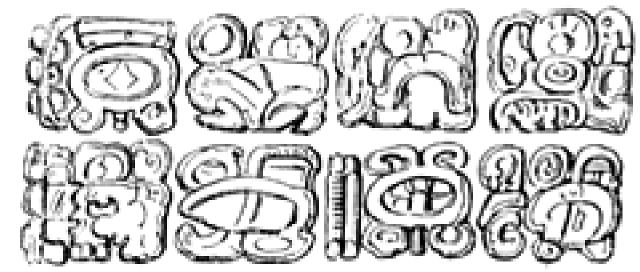


Nótese que al número 27 dado por:

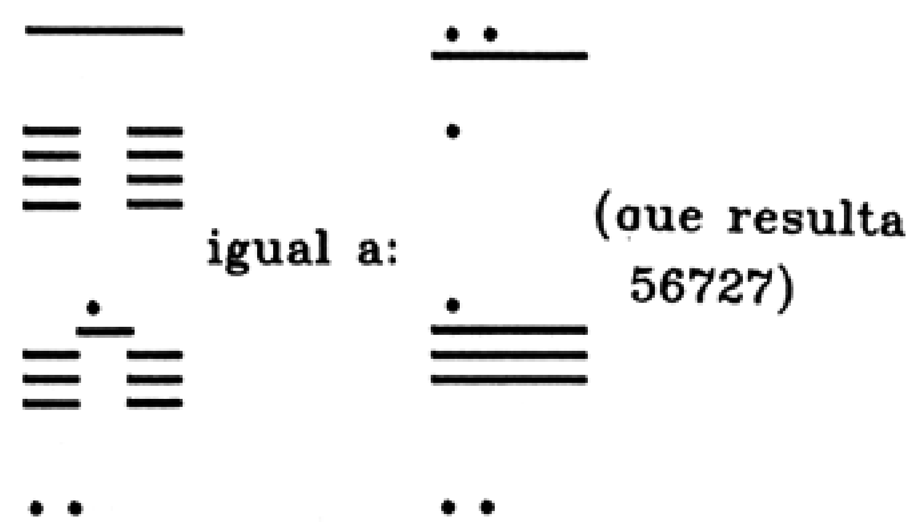


lo estamos reescribiendo como:



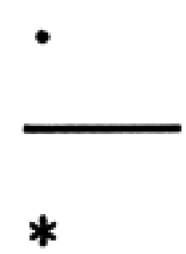


Donde hemos agregado un cero que deja al número invariante, pero que nos permite configurar el producto como una matriz cuadrada que corresponde al "ábaco maya". Sumando los coeficientes de las líneas paralelas a la diagonal M y construyendo la columna que corresponde al resultado final nuevamente con el bloque de la esquina inferior derecha del ábaco como base, tenemos:



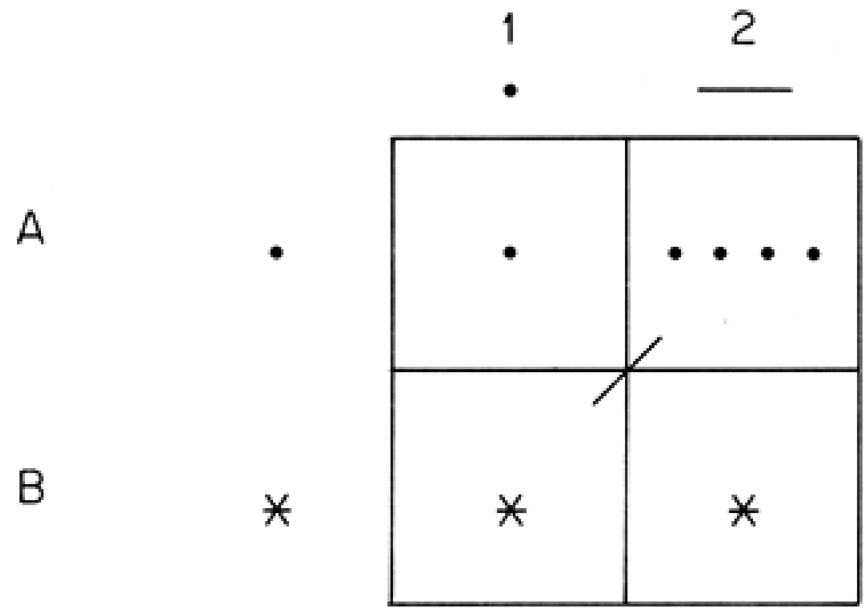
DIVISIÓN

En la división tenemos un proceso inverso al de la multiplicación. Dividamos, por ejemplo, 500 entre 20. Tenemos que el 500 se representa por:



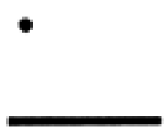
y el número 20 simplemente por

Colocamos el divisor como una columna a la izquierda y el dividendo como una diagonal del "ábaco", de manera tal que las unidades del dividendo queden al nivel de las unidades del divisor (nos referimos a los coeficientes de la potencia cero de veinte), como se muestra en la siguiente figura:

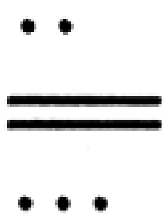


En la casilla A1 tenemos un punto que pertenece al dividendo. Para tener a éste como producto parcial correcto, debería aparecer un punto arriba en la columna 1, mismo que colocamos. Esto significa que en la casilla B1 debemos colocar un cero. Esto cierra nuestras cuentas para la columna uno.

Transferimos ahora la raya que se encuentra en la diagonal, como cinco puntos a la casilla A2. Para tener este como un producto parcial correcto, necesitamos una raya en la cabeza de la columna 2. Vemos que necesitamos un cero en la casilla B2, mismo que ya tenemos. Esto cierra nuestras cuentas. El resultado es exacto. El cociente se lee juntando los encabezados de las columnas al colocarlo en forma vertical. El número final está dado por

 = 25

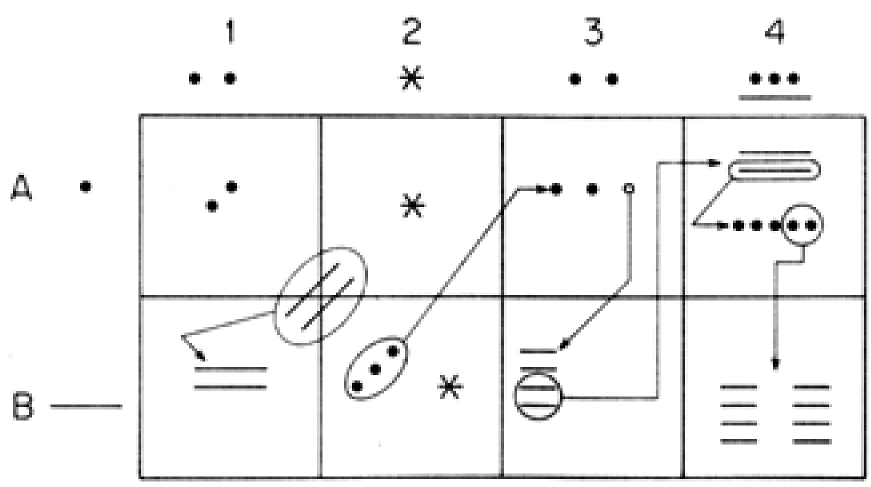
Tomemos otro ejemplo. Dividamos el número 1003 entre el número 25. El primero se representa por



y el segundo por

Nuevamente, ponemos el divisor como una columna a la

izquierda y el dividendo como una diagonal del "ábaco", de manera tal que las unidades del dividendo queden al nivel de las unidades del divisor, como se muestra en la figura siguiente.



Ahora, en la casilla A1 tenemos dos puntos que pertenecen al dividendo. Para tener a éstos como producto parcial correcto, deberían aparecer dos puntos arriba en la columna 1, mismos que colocamos. Esto significa que en la casilla B1 debemos colocar dos barritas. Éstas se toman de la esquina superior derecha de esta casilla. De este modo en esta esquina queda cero. Este cero se transfiere a la casilla A2. Para que el producto parcial en esta casilla sea cero, es necesario colocar en la columna superior correspondiente un cero. Esto trae como consecuencia que en la casilla B2 debamos tener cero. Así que podemos, si queremos, terminar la división en este momento y diremos que el resultado es 40 y nos sobran tres unidades. Sin embargo, si queremos fracciones podemos continuar la división del mismo modo y dado que en la casilla B12 debe haber un cero, transferimos los tres puntos del dividendo hacia la casilla A3, que ya corresponde a fracciones de 20. Si dejamos los tres puntos en la casilla A3, necesitaríamos colocar en la columna superior correspondiente tres puntos. Esto nos lleva a necesitar tres rayas para la casilla B3, que no podemos tomar de ningún lugar, a no ser de la casilla A3. Por tanto, descomponemos un punto en cuatro rayas, mismas que pasamos a la casilla B3, y dejamos 2 puntos en la casilla A3, lo cual indica que en la cabeza de la columna 3 debemos tener dos puntos, mismos que escribimos. Esto significa que en la casilla B3 solamente debemos tener dos rayas. Así que las dos sobrantes se transfieren a la casilla A4. Si colocamos también dos rayas en la cabeza de la columna 4, necesitaríamos diez rayas en la casilla B4. No hay de donde tomarlas a no ser que de la casilla A4. Es necesario, nuevamente, encontrar una solución conciliatoria. Podemos ir al "tanteo", como lo hacemos en nuestras divisiones. Es claro que la cifra correcta colocada en la cabeza de la columna 4 debe ser inferior a dos rayas. Descompongamos, en la casilla A4, una raya en cinco puntos. De estos cinco puntos, transfiramos dos a la casilla B4, que se ven convertidos en ocho rayas en esta casilla. De este modo, el número ocho queda en la casilla A4. Vemos que esta es la solución conciliatoria que lleva a un ocho para la parte superior de esa columna y deja las cuentas perfectamente cerradas, porque tenemos los correspondientes ocho puntos en la casilla A4 y las correspondientes ocho rayas en la casilla B4. Esto significa que, al incluir la fracción, el residuo es cero.

Las líneas gruesas en el ábaco indican dónde empiezan las potencias negativas de 20, esto es, las fracciones de la unidad.

En este caso la división no deja residuos, aunque sí contiene fracciones. En la parte superior de la cuadrícula se lee el cociente y éste es:

• • $\quad 2 \times 10^{1} = 40$

* $\quad 0 \times 10^{0} = 0$

[ ] (separación para fracciones vigesimales)

• • $\quad 2 \times 10^{-1} = 0.1$

• • • $\quad 8 \times 10^{-2} = 0.02$

Como puede verse, el resultado de la división es 40.12 exactamente.

Las operaciones de raíz cuadrada y raíz cúbica, son derivaciones de la operación de división, en las que se busca repartir las cifras del dividendo de manera tal que el divisor y el cociente sean iguales entre sí. En el caso de la raíz cúbica se utilizan dos cuadrículas. Para la raíz cuarta se utlizan tres cuadrículas, para la quinta se utilizan cuatro, etc. Podemos extraer, así, raíces de cualquier orden. Pero este tema de las raíces será abordado en otro artículo.

Para finalizar y para recalcar la importancia de contar con un buen sistema de representación numérica, le pediremos al lector que contraste la hermosa y poderosa flexibilidad de la numerología maya, que es muy similar a la que actualmente utilizamos, con la de los antiguos números romanos. En la antigua numeración romana se desconocía el cero y no había un algoritmo para representar cualquier número.

BIBLIOGRAFÍA

1. Girard, R. 1977. *Origen y desarrollo de las civilizaciones antiguas de América*. Editores Mexicanos Unidos S.A., México D.F.
2. Fray Diego De Landa. 1973. *Relación de las cosas de Yucatán*. Editorial Porrúa México D.F.
3. Calderón, H. M. 1966. *La Ciencia Matemática de los Mayas*. Editorial Orión, México D. F.
4. Morley, S. G. 1972. *La civilización Maya*. Fondo de Cultura Económica. México.