

# Competencias de modelación y uso de tecnología *...en Ecuaciones Diferenciales*

**Ruth Rodríguez Gallegos**

[ruthrdz@itesm.mx](mailto:ruthrdz@itesm.mx)

*Tec de Monterrey*

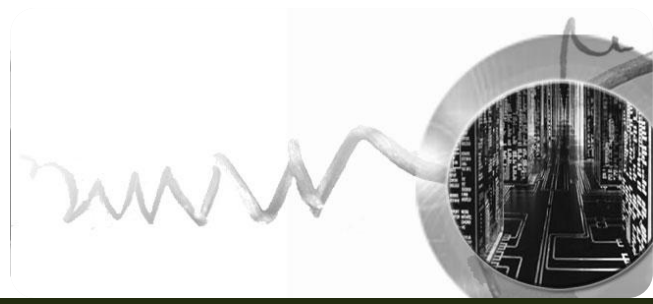
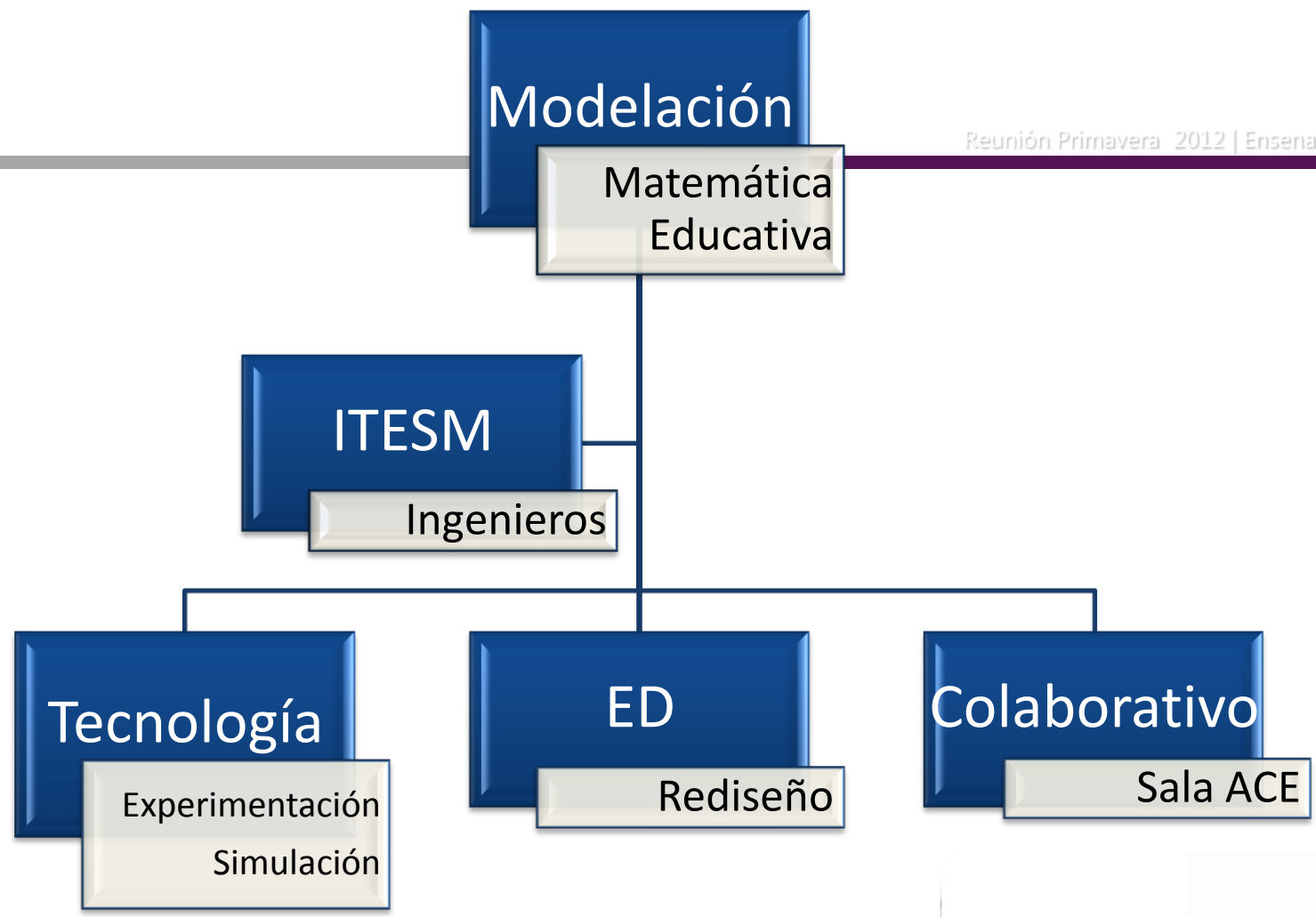
*Campus Monterrey*

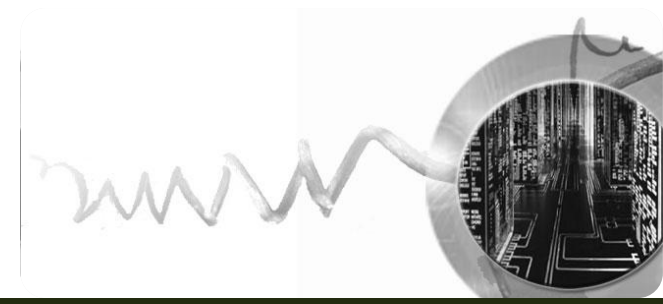
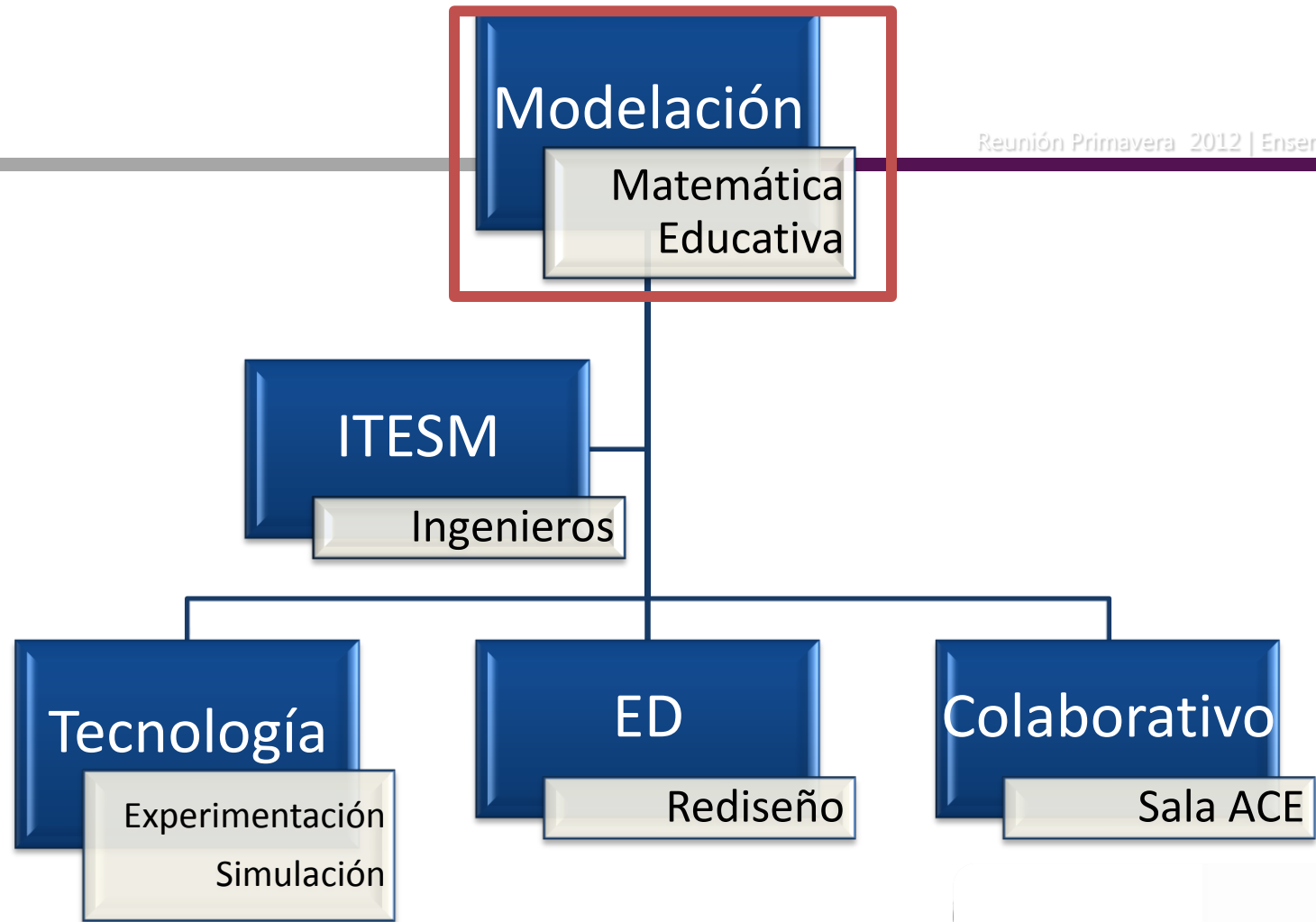


**CUDI**

23 - 25 mayo  
2012  
Ensenada, Baja California



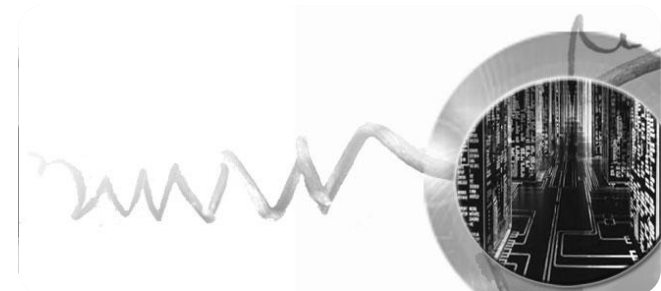




# Una primera distinción importante

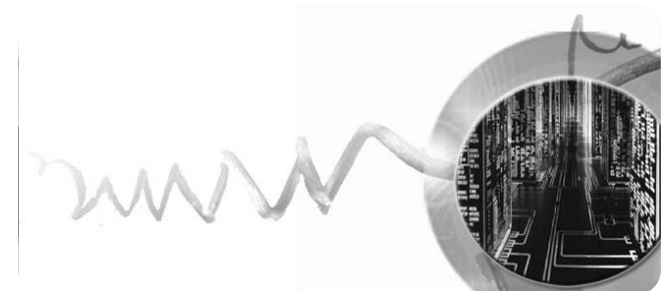
Reunión Primavera 2012 | Ensenada, Baja California

- Modelación en:
  - El ámbito profesional
    - Modelación del experto o investigador
  - El ámbito educativo
    - *Modelación "escolar"*



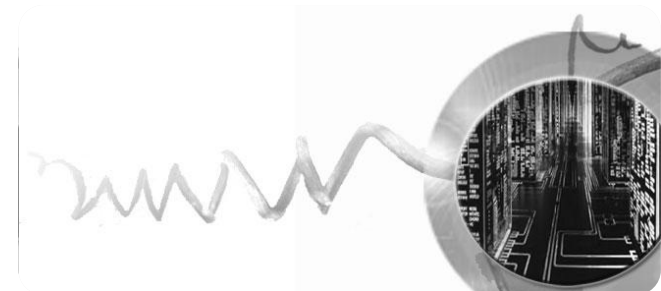
# Sobre la modelación

- Tema central en Matemática Educativa durante los últimos **35 años** (*Niss, Blum y Galbraith, 2007*):
  - *Modelación Matemática y Aplicaciones de las Matemáticas hacia campos extra-matemáticos*
- Primera acepción: relaciones entre las Matemáticas y el mundo extra-matemático (“mundo real” o “el resto del mundo”) (*Pollak, 1968*).



# Un hecho importante sobre modelación

- Existen currículum y libros de texto con referencia a fenómenos y problemas de la vida real desde hace **25 años**.
- La modelación tiene un papel importante en muchos salones de clase en diversos países sin embargo...
- “...*aún existe una distancia importante entre las ideas expresadas en el debate educativo e innovación del currículum por un lado, y la práctica diaria de enseñanza, por el otro lado. En particular, actividades de modelación genuinas son aún raras en el aula de matemáticas*” (Niss, Blum y Galbraigh, 2007).
- Aumento de investigaciones genuinas los últimos **15 años**.



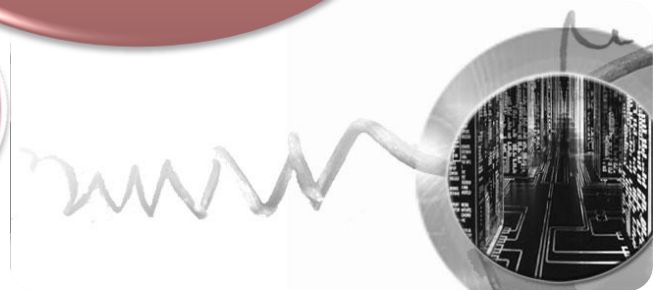
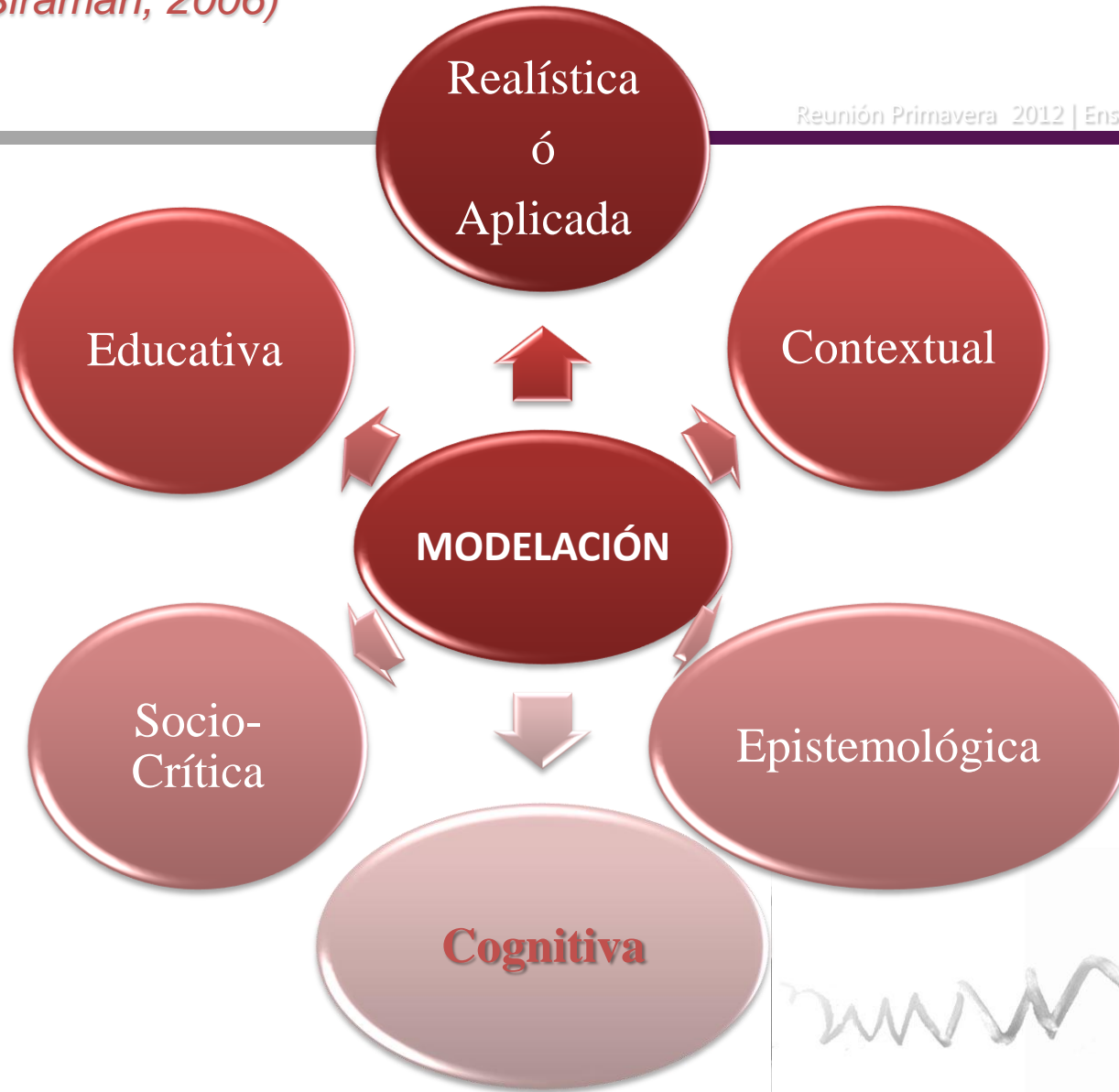


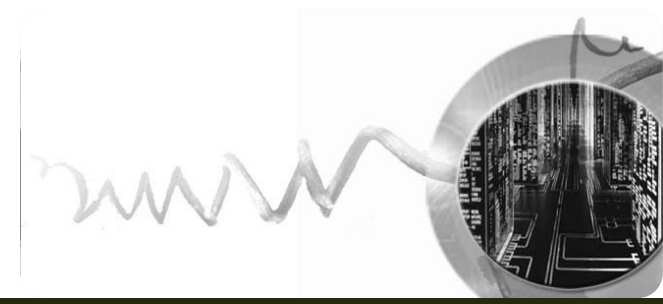
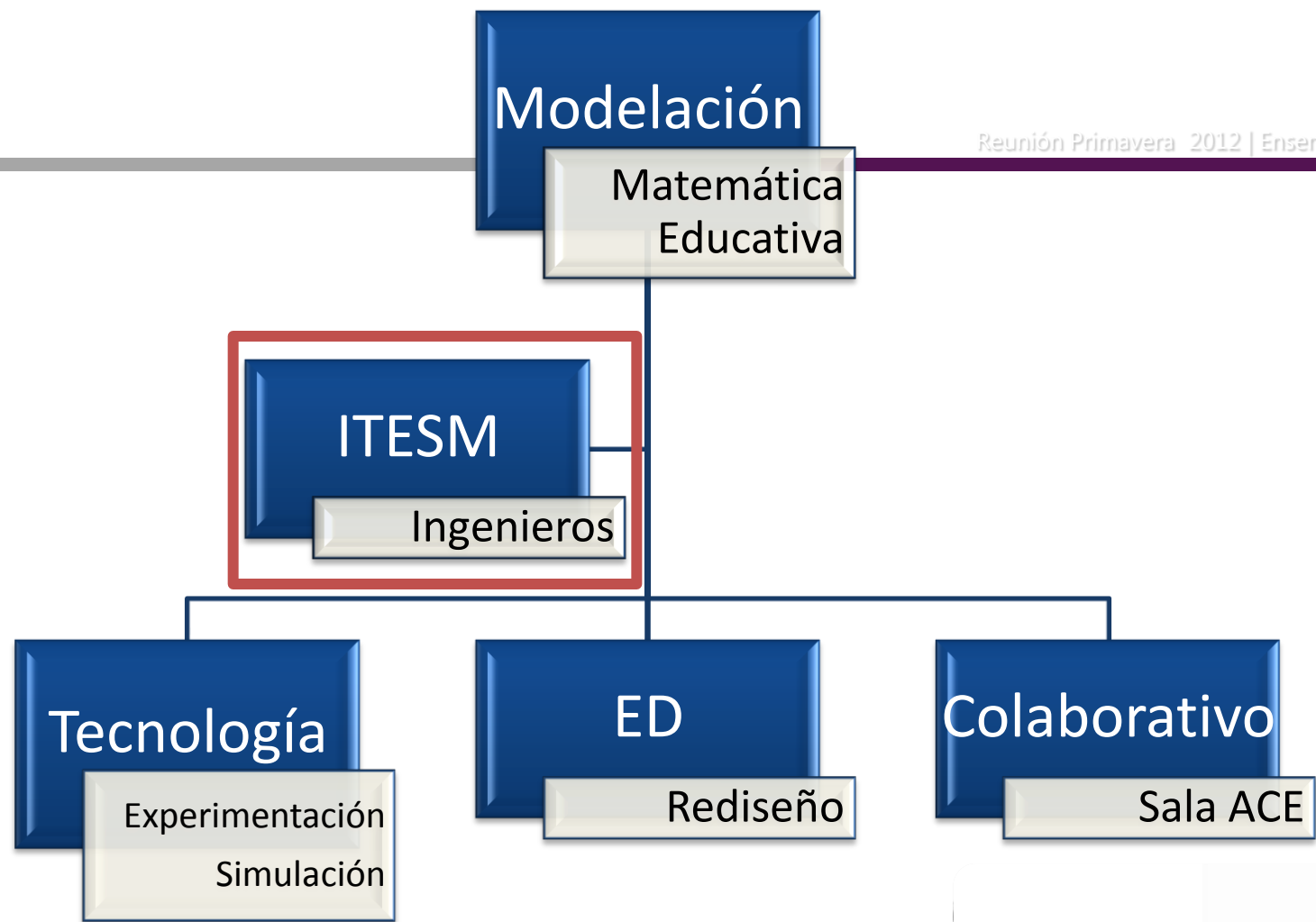
# Perspectivas de la Modelación en Educación Matemática

*(Kaiser y Siraman, 2006)*

CUDI  
23-25 mayo 2012

Reunión Primavera 2012 | Ensenada, Baja California

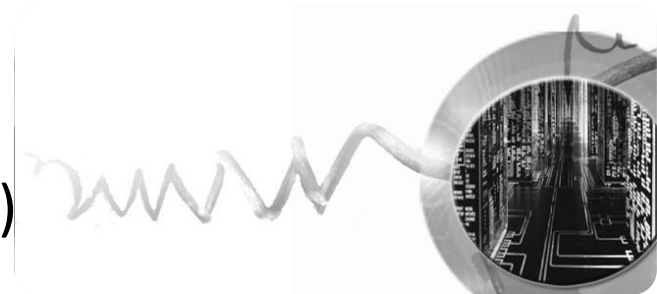






# Antecedentes del estudio

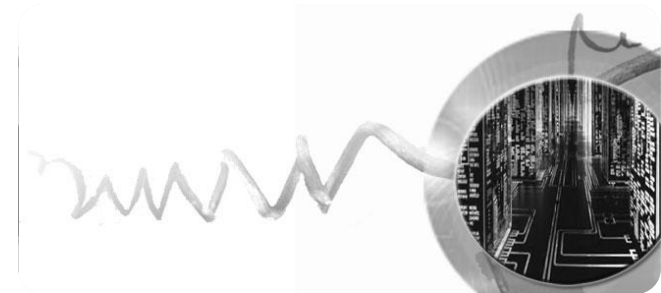
- Rediseño del Sector Curricular de Matemáticas para Ingenieros
  - Desde el año 2000
  - Aspecto instrumental de las matemáticas, modificar el qué y cómo enseñar (*Douady, 1984; Duval, 1995; Salinas y Alanís, 2009*).
- Proyecto Rediseño del curso de Ecuaciones Diferenciales
  - Desde **agosto 2008**, actualmente en curso
  - Trabajo colegiado con **15 profesores** del departamento de Matemáticas
  - Implementación: agosto **2012**
  - **Plan de Estudios 2011** (competencias)



# Aprendizaje Basado en Competencias

- El aprendizaje basado en competencias tiene como objetivo el que el alumno se forme correctamente de manera que pueda ingresar exitosamente en la sociedad.
- Con la incorporación de un aprendizaje por competencias es posible que se evalúe en función del **contenido** de los conocimientos, pero también de los **procesos** que deben realizarse y las **situaciones** en las que aplican estos conocimientos y habilidades.

*Informe PISA, (OCDE, 2003)*



## Proyecto Tuning Latinoamérica

- Afinar las estructuras educativas de los países latinoamericanos iniciando un debate cuya meta es identificar e intercambiar información y mejorar la colaboración entre las instituciones de educación superior para desarrollar calidad, efectividad y transparencia.

*Proyecto Tuning (2007).*

## Objetivos del Tecnológico

- El Tecnológico de Monterrey estableció para su Misión 2015 el postulado básico de "Formar personas íntegras, éticas, con una visión humanística y competitivas internacionalmente en su campo profesional, que al mismo tiempo sean ciudadanos comprometidos con el desarrollo económico, político, social y cultural de su comunidad y con el uso sostenible de los recursos naturales".

*Tecnológico de Monterrey*



# Algunas definiciones de Competencia

Reunión Primavera 2012 | Ensenada, Baja California

## Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (2006)

Una competencia es la capacidad para responder a las exigencias individuales o sociales o para realizar una actividad o una tarea.

## Proyecto Tuning (2007)

Una competencia es una red conceptual amplia que hace referencia a una formación integral del ciudadano por medio de nuevos enfoques como el aprendizaje significativo en áreas cognoscitivas (saber), psicomotoras (saber hacer y aptitudes) y afectivas (saber ser, actitudes y valores).

## Niss et al. (2007)

Una competencia es la habilidad de un individuo de realizar ciertas acciones apropiadas en situaciones problemas donde estas acciones son deseables o requeridas.



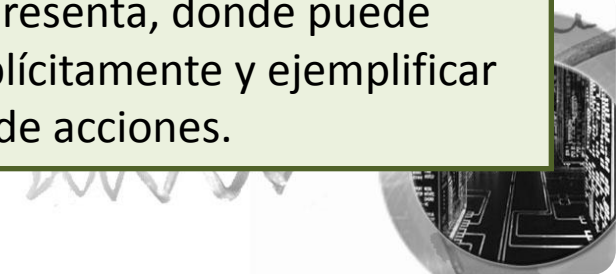
# Algunas definiciones de competencia matemática

## Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (2006)

Es la capacidad de un individuo para analizar, razonar y comunicar de forma eficaz a la vez de plantear, resolver, e interpretar problemas matemáticos en una variedad de situaciones que incluyen conceptos matemáticos cuantitativos, espaciales, de probabilidad o de otro tipo.

## Blomhoj & Hojgaard Jensen (2007)

Una competencia matemática se identifica cuando un alumno está preparado para actuar en respuesta a un cierto tipo de desafíos matemáticos en una situación que se le presenta, donde puede identificar, formular explícitamente y ejemplificar una serie de acciones.



# Algunas definiciones de Competencia de modelación matemática

Reunión Primavera 2012 | Ensenada, Baja California

## Blomhoj (2004)

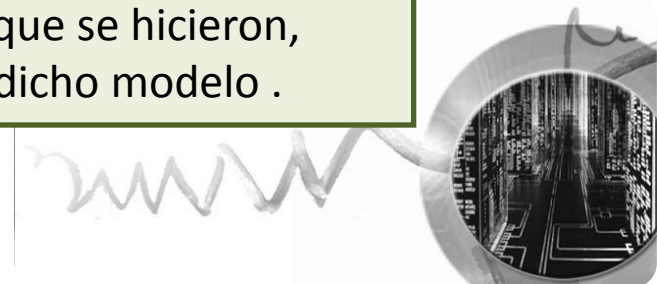
Ser capaz de llevar a cabo en forma autónoma y consciente todos los aspectos de un proceso de modelación en un contexto dado.

## Niss et al. (2007)

Habilidad de identificar preguntas relevantes, variables y relaciones en una situación del mundo real dada, trasladar estas a las matemáticas e interpretar y validar la solución del problema matemático en relación a la situación dada, así como la habilidad para analizar o comparar modelos investigando las relaciones que se hicieron, revisando propiedades de dicho modelo .

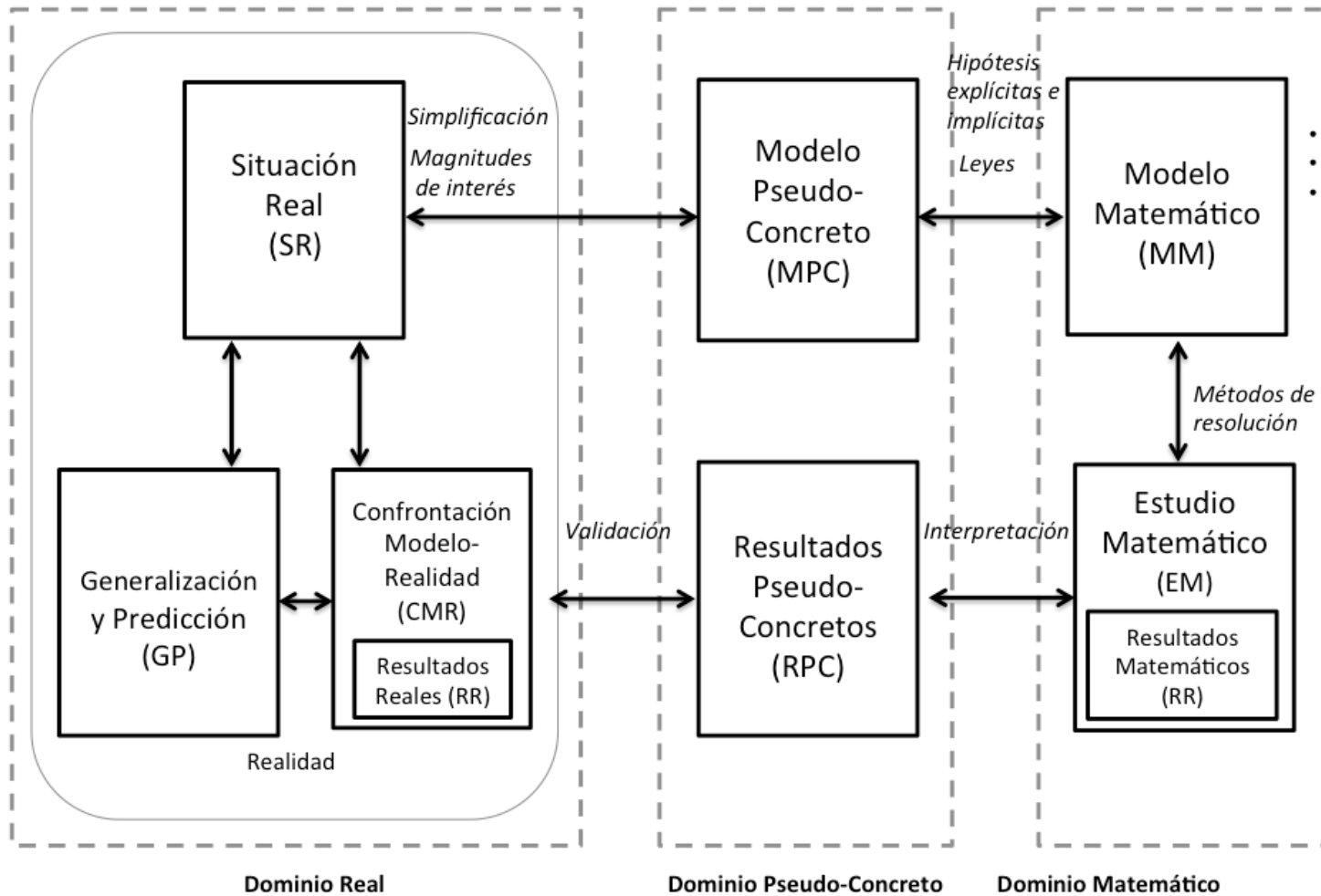


23



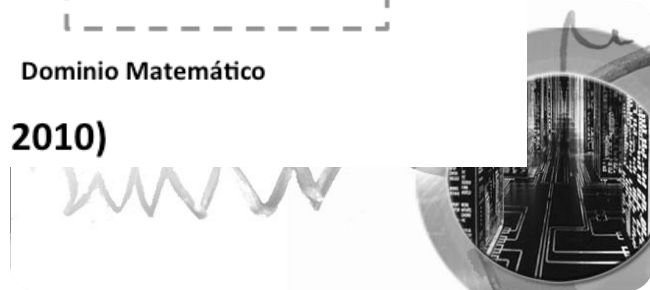


CUDI  
23-25 mayo 2012



- Analítico
- Gráfico
- Numérico

Ciclo de modelación de Rodríguez (2007, 2010)





CUDI  
23-25 mayo  
2012

# Competencias de modelación

Reunión Primavera 2012 | Ensenada, Baja California

## PISA (OCDE, 2003):

- Estructurar el campo o situación que va a modelarse.
- Traducir la realidad a una estructura matemática.
- Interpretar los modelos matemáticos en términos reales.
- Trabajar con un modelo matemático.
- Reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados.
- Comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones).







CUDI  
23-25 mayo 2012

# Competencias de modelación

da, Baja California

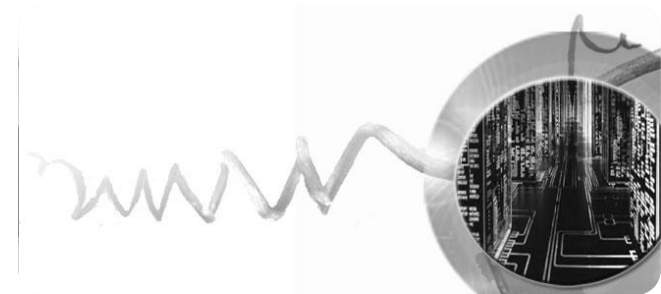
Items
Contenido
1. Habilidad para manejar y dar sentido a datos naturales o experimentales
2. Determinación de variables y parámetros que describen observaciones
3. Reconocimiento de patrones en datos y procesos
4. Generación de expresiones matemáticas que conjuntan observaciones
5. Habilidad de crear un modelo que represente al sistema con relación a las variables correctas
6. Habilidad técnica de manipular las expresiones matemáticas del modelo para lograr los objetivos deseados
Presentación
7. Representación e interpretación de datos
8. Translación de información en una forma pictórica
9. Habilidad de comunicarse claramente, especialmente de manera escrita
Manejo
10. Habilidad de identificar situaciones y formular problemas
11. Habilidad de consultar libros para información adicional
12. Comprensión de cuándo cambiar un modelo , método u objetivo en la discusión de una problema.
13. Reconocimiento de lo que constituye la solución o evaluación del éxito de los modelos.
14. Habilidad de manejar trabajo efectivamente en un grupo.

Competencias de modelación que propone Houston (2007)



## MaaB (2004)

- Competencia para entender el problema real y crear un modelo basado en la realidad
- Competencia para crear un modelo matemático del modelo real
- Competencia para resolver preguntas matemáticas con modelos matemáticos
- Competencia para interpretar resultados matemáticos en una situación real
- Competencia para validar la solución.





## Henning & Keune (2007)

### *-Nivel 1: Reconocer y comprender la modelación.*


Habilidades para reconocer y describir el proceso de modelación y caracterizar, distinguir y localizar las fases del proceso de modelación.

### *-Nivel 2: Modelación e independencia*

Habilidad para analizar y estructurar problemas, abstraer cantidades, adoptar diferentes perspectivas, crear modelos matemáticos, trabajar en modelos, interpretar resultados, validar modelos, resolver modelos independientemente, adoptar su modelo o desarrollar nuevos procedimientos.

### *-Nivel 3: Meta reflexión de modelación.*

Habilidad para críticamente analizar el modelo, formar criterios para evaluar el modelo, reflejar las propiedades de modelación, reflexionar sobre las aplicaciones de las matemáticas.



### **Situación real/ Modelo Pseudo-concreto**

Competencia para manejar y dar sentido a datos naturales o experimentales  
Competencia para determinar variables y parámetros que describen observaciones  
Competencia para reconocer de patrones en datos y procesos  
Competencia para identificar situaciones y formular problemas  
Competencia para entender el problema real y crear un modelo basado en la realidad  
Competencia para analizar y estructurar problemas,  
Competencia para abstraer cantidades,  
Competencia para adoptar diferentes perspectivas

### **Modelo matemático**

Competencia para traducir la realidad a una estructura matemática.  
Competencia para interpretar los modelos matemáticos en términos reales.  
Competencia para generar de expresiones matemáticas que conjuntan observaciones  
Competencia para crear un modelo que represente al sistema con relación a las variables correctas  
Competencia de manipular las expresiones matemáticas del modelo para lograr los objetivos deseados  
Competencia para representar e interpretar de datos, trasladar información en una forma pictórica, crear un modelo matemático del modelo real.  
Competencia para crear modelos matemáticos  
Competencia para traducir la realidad a una estructura matemática.  
Competencia para interpretar los modelos matemáticos en términos reales.

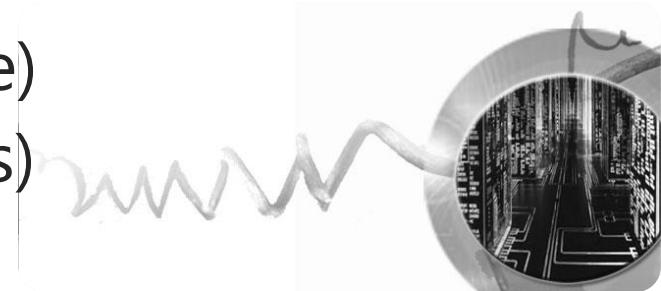
### **Resultados pseudoconcretos/Confrontación con la realidad/Generalización y predicción**

Habilidad para críticamente analizar el modelo, formar criterios para evaluar el modelo, reflejar las propiedades de modelación, reflexionar sobre las aplicaciones de las matemáticas.  
Competencia para interpretar resultados matemáticos en una situación real  
Competencia para validar la solución  
Reconocimiento de lo que constituye la solución o evaluación del éxito de los modelos.  
Habilidad de comunicarse claramente, especialmente de manera escrita  
Reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados.  
Comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones).

### **Estudio matemático/ Resultados matemáticos**

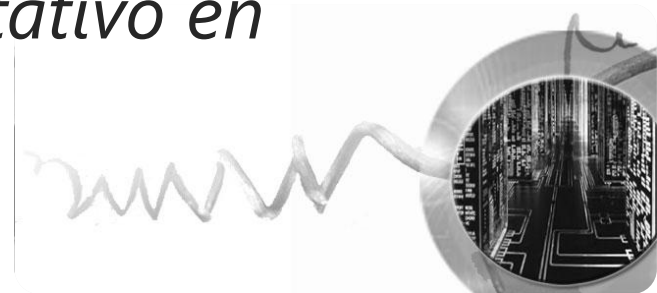
Competencia para trabajar con un modelo matemático.  
Competencia para reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados.  
Competencia para consultar libros para información adicional  
Competencia para comprender de cuándo cambiar un modelo , método u objetivo en la discusión de una problema.  
Competencia para resolver preguntas matemáticas con modelos matemáticos  
Competencia para trabajar en modelos  
Competencia para interpretar resultados  
Competencia para validar modelos.  
Competencia para resolver modelos independientemente  
Competencia para adoptar su modelo o desarrollar nuevos procedimientos.

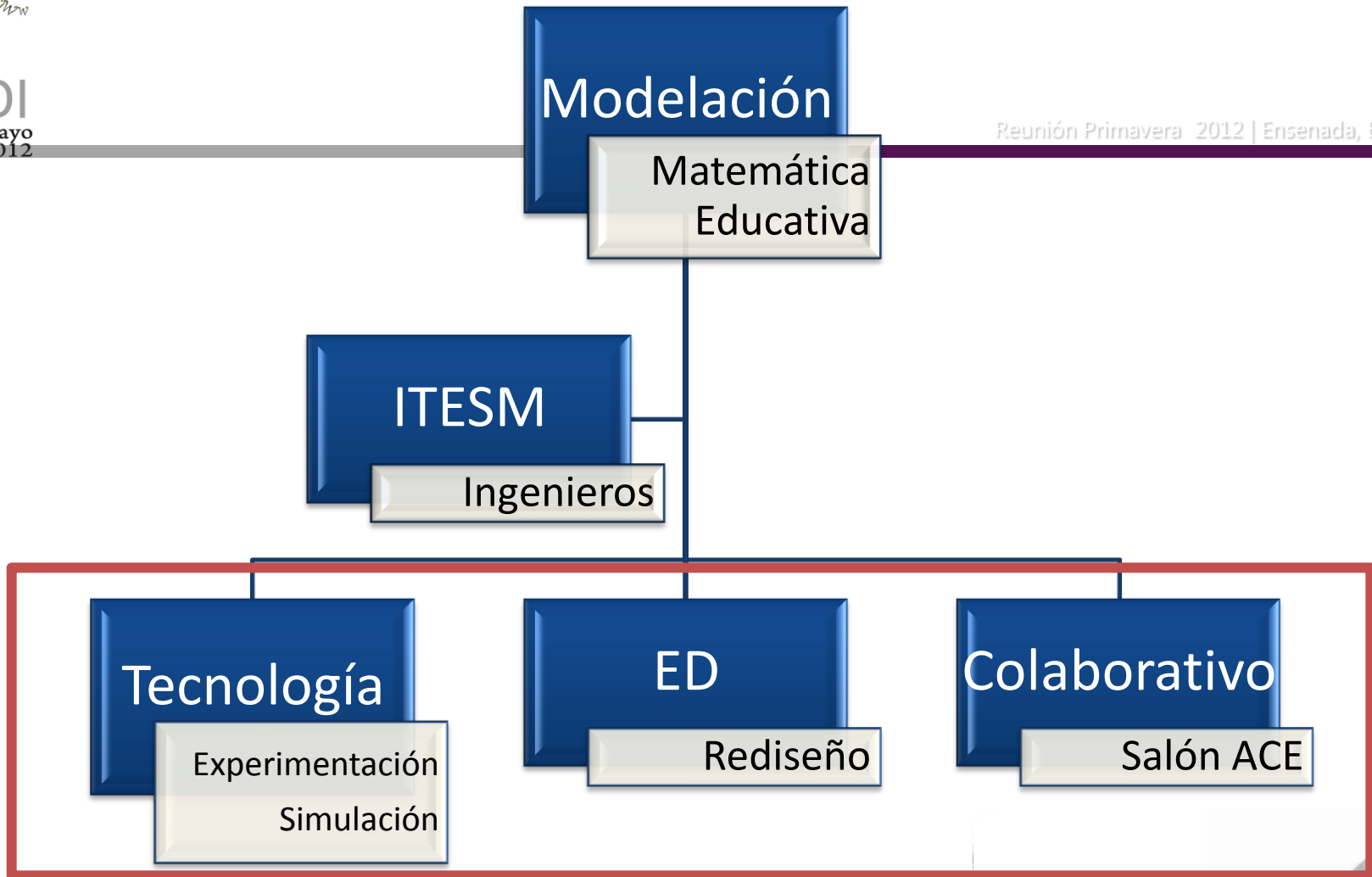
- Grupo de alumnos que cursaban la materia de Ecuaciones Diferenciales en el semestre Enero-Mayo de 2012 en el Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey.
- En total había 40 alumnos, 33 de ellos hombres y 7 mujeres.
- El salón donde se lleva a cabo la clase es el salón ACE.
- El tema a tratar es Ecuaciones Diferenciales Lineales a través del contexto *Circuitos eléctricos*
- Metodología cualitativa (primera fase)
- Observación en clase (dos profesores)



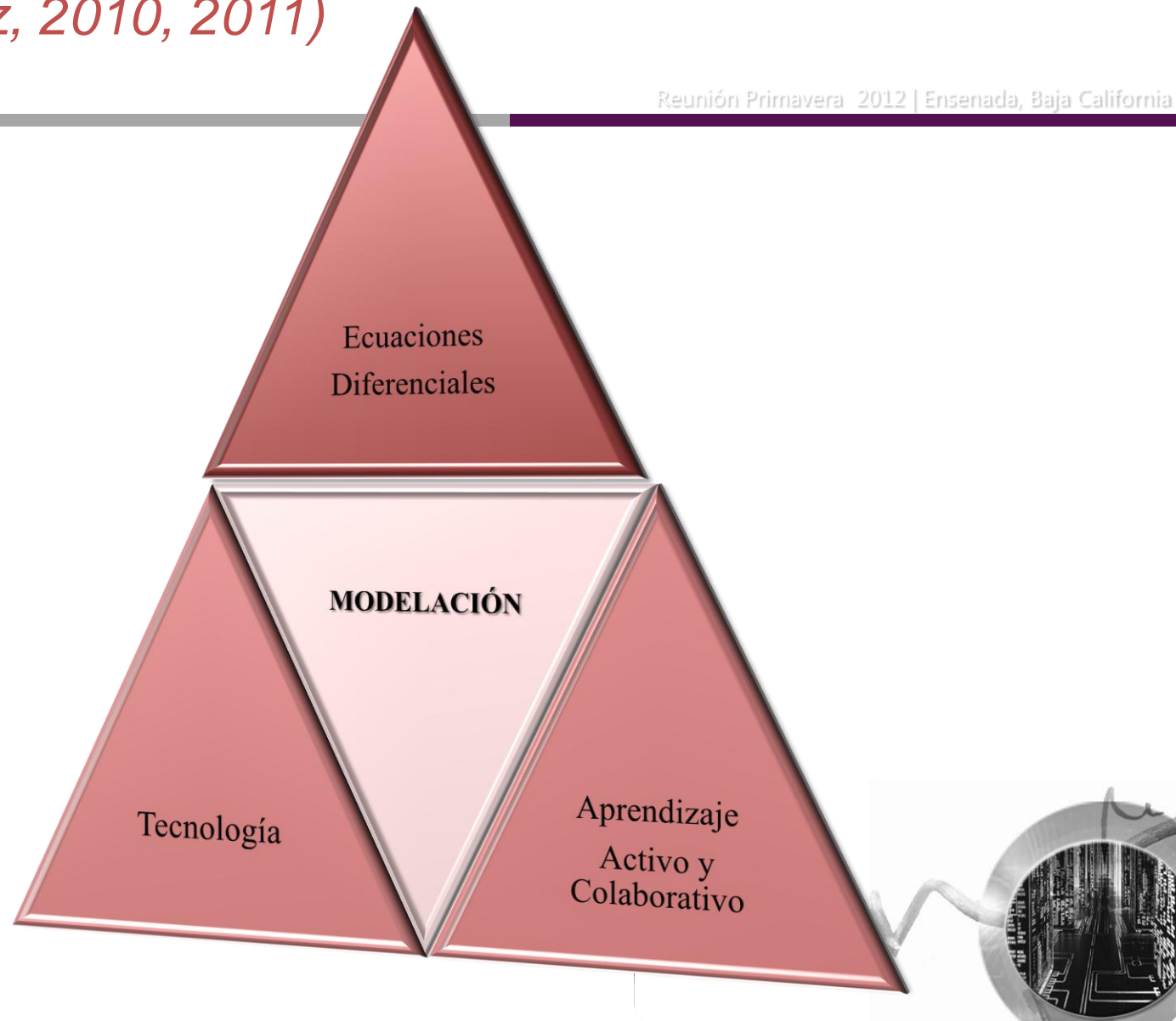
# Técnicas de recolección de datos

- Guía de observación durante la clase apoyada con observación de un video grabación de la clase.
- Producción de alumnos a través de la realización de una serie de actividades durante la clase.
- *Realización de reactivos durante examen parcial y final (análisis cualitativo y cuantitativo en proceso).*

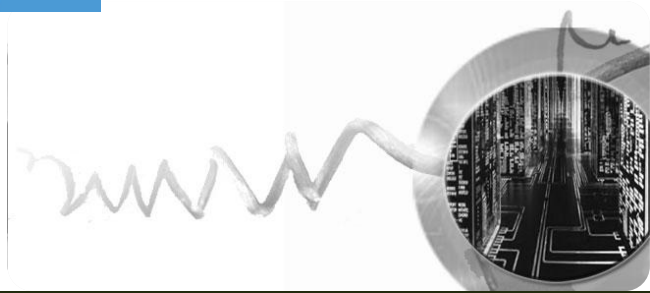
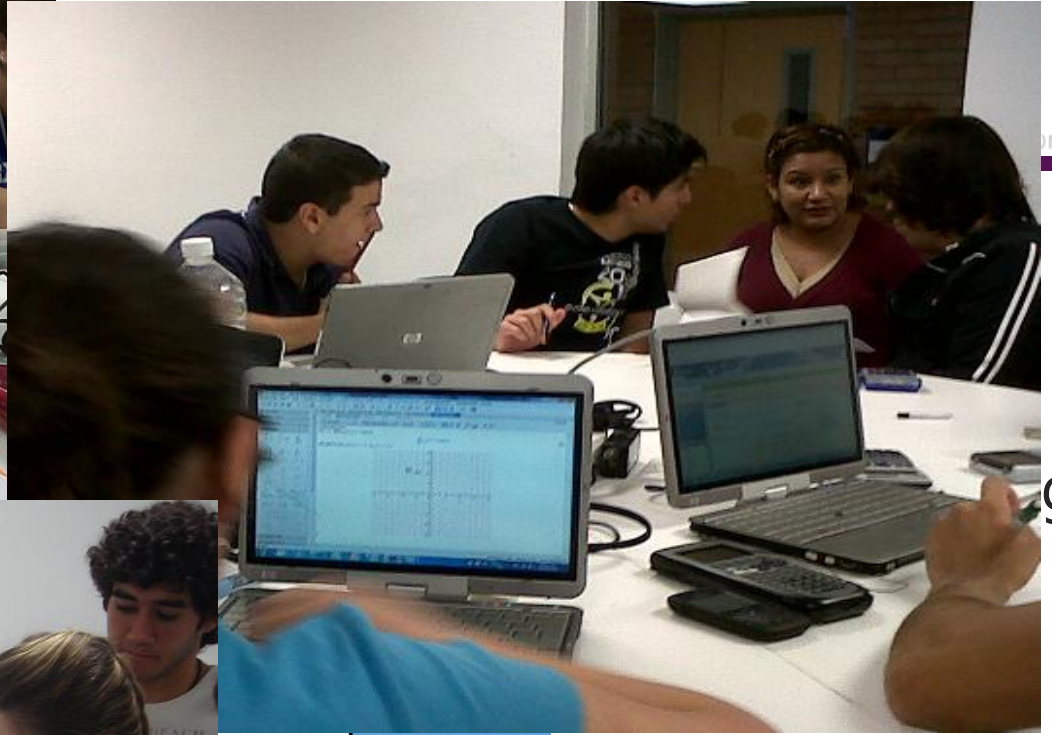




# Visión del curso ED en proyecto *(Rodríguez, 2010, 2011)*







ornia

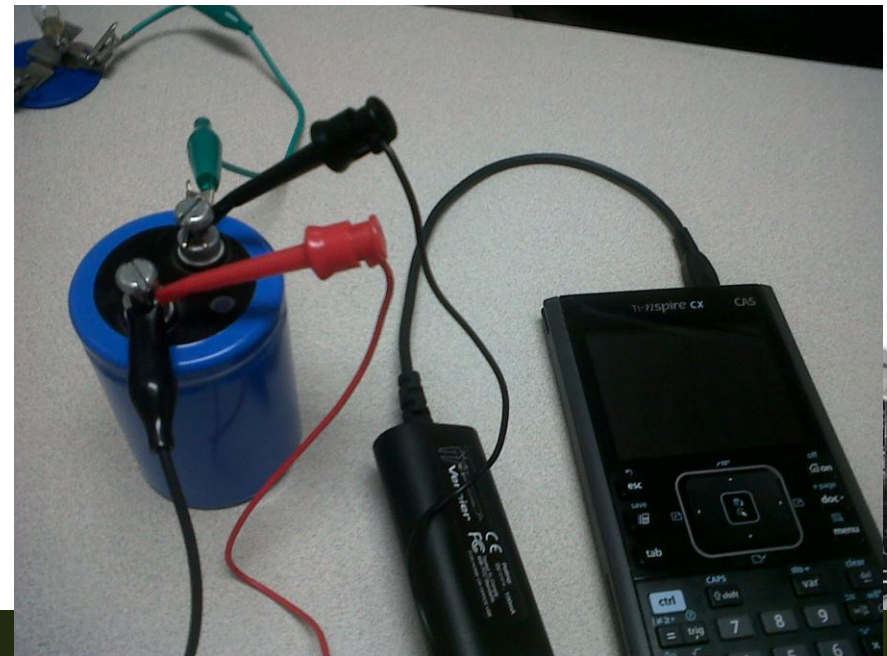
gí



CUDI  
23-25 mayo 2012

Reunión Primavera 2012 | Ensenada, Baja California

- Calculadora TI Nspire CX CAS
- Sensor de voltaje compatible con la TI (+ Easy Link / Lab Cradle)
- TI Navigator (apara proyección de trabajo de alumnos frente a la clase)
- Circuito eléctrico RC: Un juego de pilas, 4 conectores, un capacitor, un foco (que juega el papel de una resistencia).



# Experimentación



## 1º parte

Discutir grupalmente los conocimientos previos de los alumnos para construir el modelo de una ecuación diferencial de un circuito eléctrico LRC.

## 2º parte

Armar por equipos un circuito eléctrico RC. Conectar el sensor de la Calculadora TI y observar la gráfica que se forma en la carga y descarga del capacitor.

## 3º parte

Realizar una actividad donde se analizan las gráficas de carga y descarga del capacitor elaboradas por los alumnos y se les pide analizarlas.

## 4º parte

Resolver un problema por equipo que involucra la utilización del modelo elaborado en un Circuito RC con entrada CONSTANTE.

## 5º parte

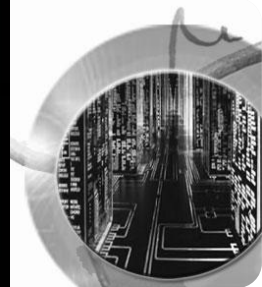
Contestar individualmente un problema en el que se les pide determinar la carga y la corriente de un circuito RC con entrada SENOIDAL (variable).






Se observa que los alumnos:

- Mediante discusión grupal identifican mejor la situación que se les presentaba y comprenden el papel de las variables en juego.
- Discuten sobre el circuito eléctrico y se indicaron leyes que se conocían y que ayudaban a modelar el problema que pretendían resolver.



 Armaron el circuito eléctrico con el material disponible en cada equipo y apoyándose en los demás equipos de la mesa.

Parte 2

Reunión Primavera 2012





CUDI  
23-25 mayo 2012

Armaron el circuito eléctrico con el material disponible en cada equipo y apoyándose en los demás equipos de la mesa.

Reunión Primavera

Parte 2

California





El voltaje introducido por un generador en un circuito cerrado es igual a la suma de caída de voltaje en cada elemento del circuito (***Segunda ley de Kirchoff***).

Un circuito RLC  
esta compuesto  
por:

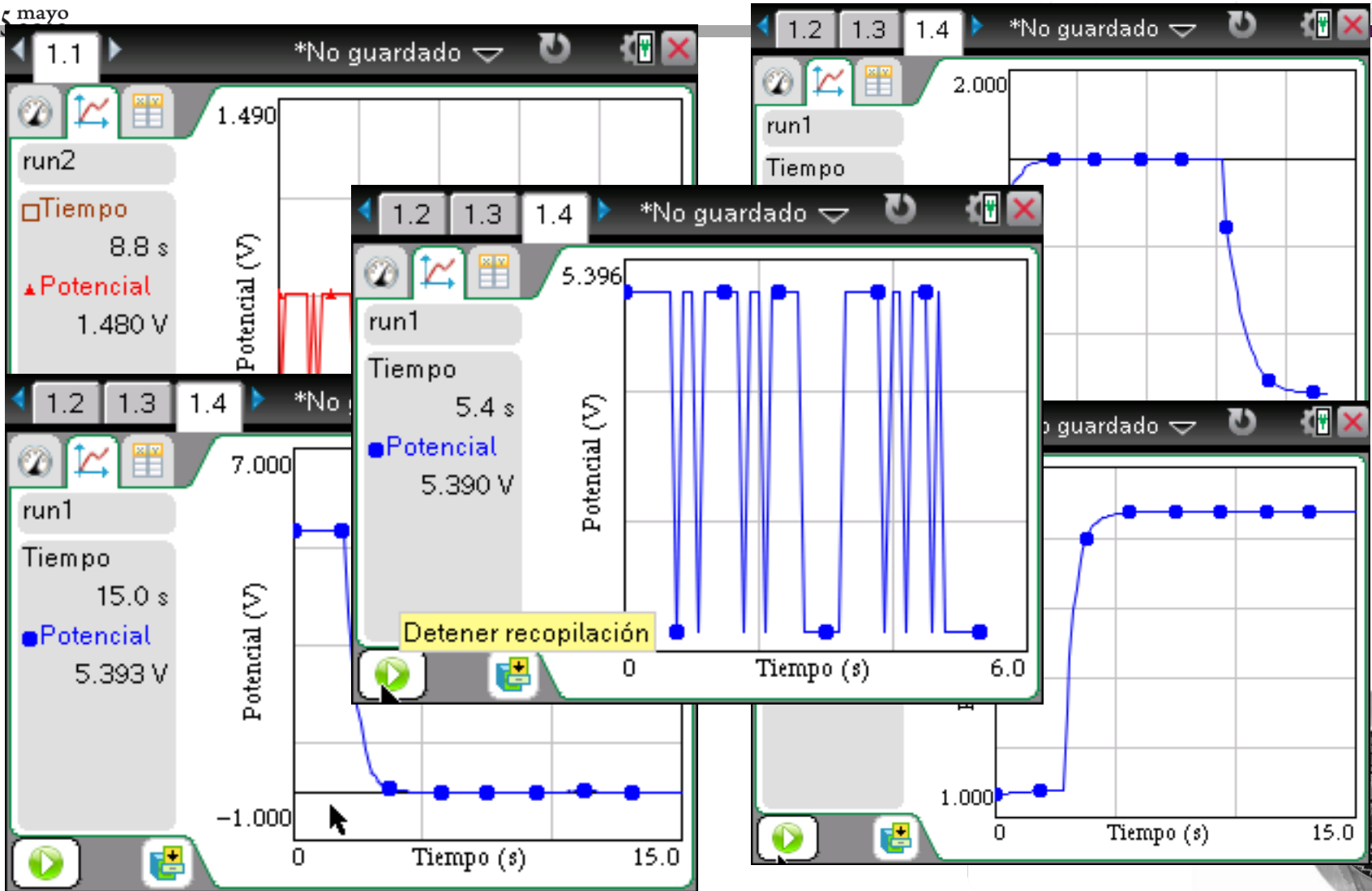
- Resistencia R
- Inductor L
- Capacitor C

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = E(t)$$





- Realizan la actividad de clase que se les proporciona en la que se les pide interpretar las gráficas de carga y descarga del circuito armado.







CUDI  
23-25 mayo 2012

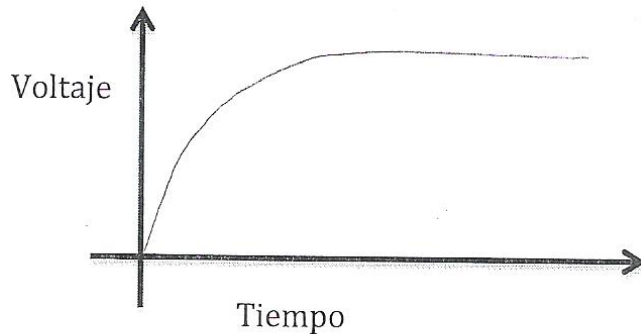
# Resultados

Parte 3

Reunión Primavera 2012 | Ensenada, Baja California

-Los alumnos conectaron los sensores a los circuitos armados y analizaron las gráficas obtenidas.

9.- Observa la gráfica de la calculadora TI, analízala y dibújala:

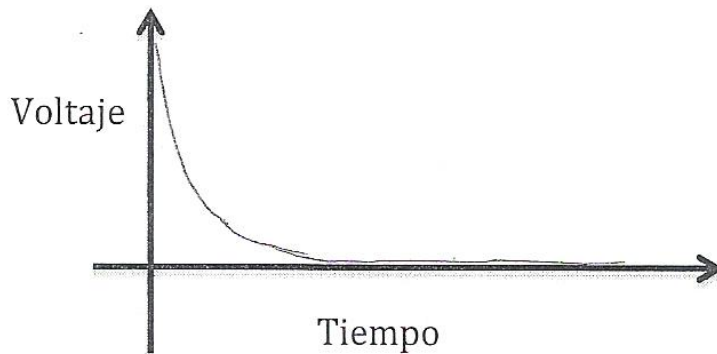


10.- ¿Qué puedes decir de la forma de la gráfica? ¿Cuál es su asíntota? ¿Porqué crees que es así?

significa que el capacitor se cargó. llega a su carga máxima y se abre.  
su asíntota es en 6, porque es el voltaje de las 4 baterías



13.- Realiza una gráfica de manera análoga al paso 4 anterior, dibújala en el sistema coordenado de abajo:



14.- ¿Qué puedes decir de la gráfica? ¿Cuál es su asíntota? ¿Porqué crees que es así?

Se descargó el capacitor. Su asíntota es cercana a 0, porque se descarga.

- Los alumnos son capaces a través de una discusión grupal el establecer/comprender la ecuación diferencial de primer orden que modela un circuito RC

Los alumnos asocian los datos necesarios en la ecuación diferencial de acuerdo con las variables que se les proporcionan.

#### Actividad *Circuito Eléctrico RC* (SEGUNDA PARTE)

Se aplica una fuerza electromotriz de 100 volts a un circuito en serie RC, en el que la resistencia es de 100 ohms y la capacitancia es de 0.05 farads.

- Determina la **Ecuación Diferencial** que permite estudiar el cambio en la carga  $q(t)$  en el capacitor respecto al tiempo.

$$100 q' + \frac{1}{.05} q = 100$$

- Determina la carga  $q$  en el capacitor respecto al tiempo  $t$  si  $q(0) = 0$  volts (es decir, resuelve la ED anterior porque se está pidiendo la **solución particular**).

$$100 \frac{dq}{dt} + \frac{1}{.05} q = 100 \quad q(0) = 0$$

-Los alumnos resuelven la ecuación diferencial que habían planteado anteriormente a través de un método preciso:

a) Establecer la forma canónica.  $y' + P(x)y = Q(x)$

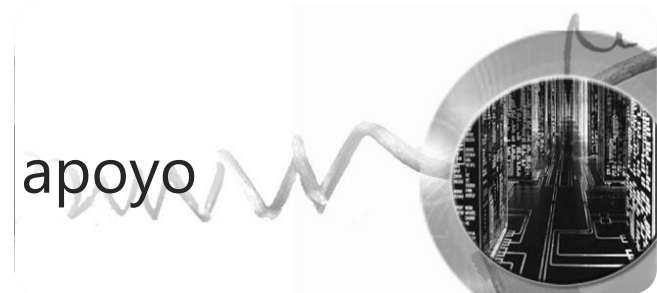
b) Reconocer las funciones  $Q(t)$  y  $P(t)$  en juego

c) Obtener el factor integrante  $M(x)$

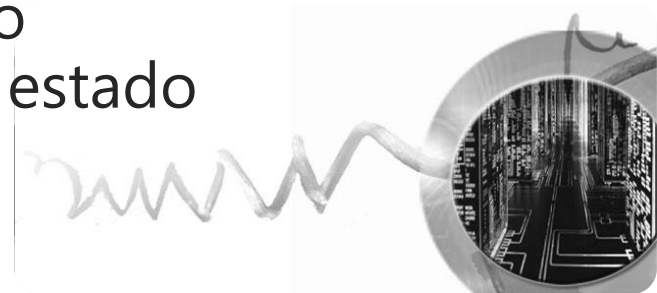
d) Reconocer el uso de una fórmula anteriormente establecida en clase

$$y(x) = \frac{1}{M(x)} \int M(x)Q(x) dx$$

-Discuten en el proceso matemático con apoyo de sus compañeros de equipo/mesa.



- Los alumnos fueron capaces de responder las preguntas que se indicaban
  - a) Encontrar la carga del capacitor en todo tiempo
  - b) Encontrar la carga del capacitor en un tiempo específico.
- Los alumnos reconocen la necesidad de modificar el modelo cuando se les pide la corriente en el circuito.
- Los alumnos reflexionan sobre lo que sucede después de mucho tiempo con el modelo construido (comportamiento tendencial, estado transitorio vs estable).





CU  
23-25

California





$$y' + P(x)y = Q(x)$$

$$q' + \frac{1}{5}q = 1$$

$$\mu(q) = e^{\int \frac{1}{5}} = e^{\frac{1}{5}q}$$

$$y' = \frac{1}{e^{\frac{1}{5}q}} \left[ \int e^{\frac{1}{5}q} \cdot 1 dx + C \right]$$

$$y' = \frac{1}{e^{\frac{1}{5}q}} \left[ 5 e^{\frac{1}{5}q} + C \right] = \frac{5 e^{\frac{1}{5}q}}{e^{\frac{1}{5}q}} + \frac{C}{e^{\frac{1}{5}q}}$$

$$q(t) = 5 - 5e^{-\frac{t}{5}}$$

$$q(t) = 5 + ce^{-\frac{t}{5}}$$

$$q(0) = 5 + c$$

$$\boxed{C = -5}$$

c) Encuentra la carga  $q$  del capacitor en  $t = 0.005$  segundos.

$$q(0.005) = 5 - 5e^{-\frac{0.005}{5}}$$

$$\boxed{q(0.005) = 4.9975 \times 10^{-5} \text{ C}}$$

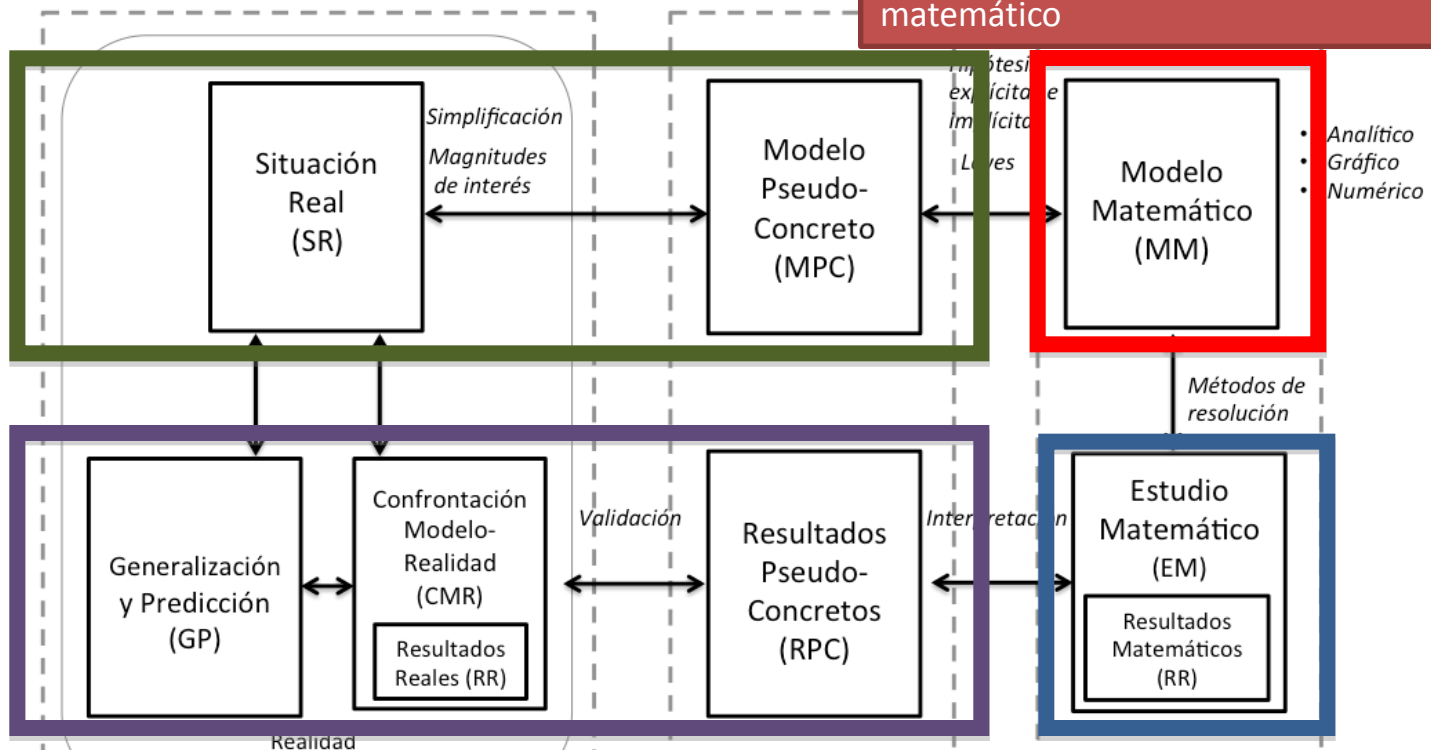


# Competencias observadas en el transcurso de la actividad



- Competencia para identificar y estructurar situaciones problema
- Competencia para entender y analizar el problema real
- Competencia para determinar y manejar variables

- Competencia para crear un modelo matemático a partir de términos reales
- Competencia para interpretar el modelo en términos reales
- Competencia para manipular las variables del modelo matemático



- Competencia para interpretar el resultado en la situación real
- Competencia para comunicar el modelo y sus resultados

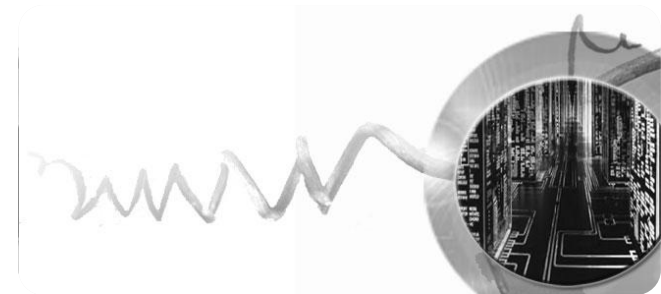
- Competencia para trabajar con el modelo matemático
- Competencia para reflexionar y criticar el modelo
- Competencia para adaptar el modelo a nuevas situaciones



# Papel de la tecnología

Reunión Primavera 2012 | Ensenada, Baja California

- Uso de la calculadora TI Nspire CX CAS con sensores de voltaje:
  - portabilidad,
  - fácil manejo de parte de los estudiantes
  - Facilidad en toma de datos
- TI Navigator (útil para monitorear el avance)
- Uso de proyectores, pizarrones, cámara de objetos



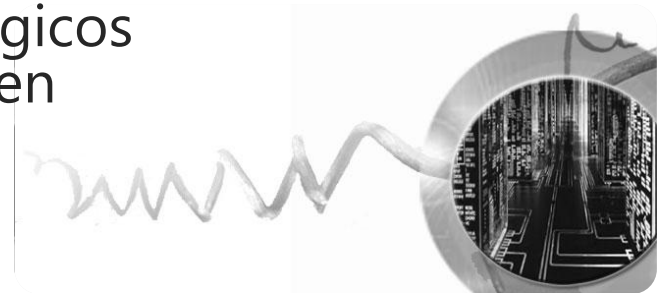


# A manera de conclusión: un primer posible caracterización

	Proyecto Tuning	Tecnológico de Monterrey
<b>Competencias de naturaleza matemática</b>	Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas	Capacidad de identificar y resolver problemas -Habilidad para modelar y resolver problemas específicos del área de ingeniería a través de ecuaciones diferenciales
	Capacidad para tomar decisiones	Pensamiento crítico
	Capacidad creativa	Creatividad
	Capacidad para actuar en nuevas situaciones	Capacidad de identificar y comprender las ecuaciones diferenciales como concepto matemático y como modelo
<b>Competencias de naturaleza tecnológica</b>	- Habilidad en el uso de las tecnologías de la información y la comunicación	Uso eficiente de la informática y telecomunicaciones Objetivo: Uso de herramientas de tecnología de información accesible en la actualidad.
<b>Competencias de naturaleza colaborativa</b>	Capacidad de trabajo en equipo	Trabajo en equipo
	Habilidades interpersonales	Buena comunicación oral y escrita
	Capacidad de motivar y conducir hacia metas comunes	



- El diseño de la actividad en base al proceso de modelación matemática permite alcanzar los objetivos de la clase que se tenían previstos.
- Adicionalmente mediante un análisis adicional de la clase se puede caracterizar algunas evidencias de desarrollo de competencias de modelación que los alumnos muestran en las diversas etapas de la clase.
- La tecnología utilizada constituye un apoyo importante en la la transición entre el dominio físico y matemático así como el desarrollo de competencias tecnológicas.
- El ambiente donde se lleva a cabo la clase (sala ACE) permite a su vez la interacción necesaria entre los alumnos y la posibilidad de utilizar medios tecnológicos adecuados para favorecer su aprendizaje en este tema.





CUDI  
23-25 mayo  
2012

Reunión Primavera 2012 | Ensenada, Baja California



Contacto:

Ruth Rodríguez, Tec de Monterrey

[ruthrdz@itesm.mx](mailto:ruthrdz@itesm.mx)

